# Sortering i lineær tid

# Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænser kræver en præcis beregningsmodel.

# Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænser kræver en præcis beregningsmodel.

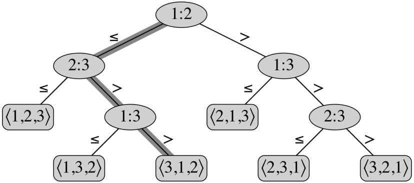
Grundlæggende handling: sammenligning af to elementer i input.
Grundlæggende svar: opstilling som skal laves for at få sorteret orden.

# Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænser kræver en præcis beregningsmodel.

Grundlæggende handling: sammenligning af to elementer i input.
Grundlæggende svar: opstilling som skal laves for at få sorteret orden.

Model for sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer:




Labels for indre knuder: array-indeks for to input elementer der sammenlignes.

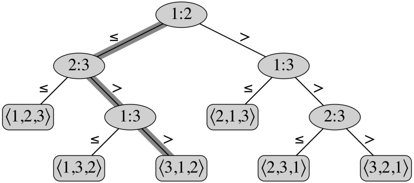
Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling der skal laves for at få sorteret orden.

# Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænser kræver en præcis beregningsmodel.

Grundlæggende handling: sammenligning af to elementer i input.
Grundlæggende svar: opstilling som skal laves for at få sorteret orden.

Model for sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer:

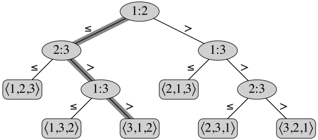



Labels for indre knuder: array-indeks for to input elementer der sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling der skal laves for at få sorteret orden.

Worst-case køretid: længste rod-blad sti = træets højde.

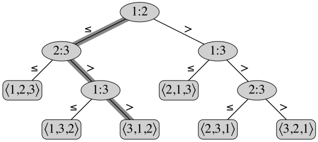
# Sammenligningsbaseret sortering




For en fast samling af $n$ elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

# Sammenligningsbaseret sortering

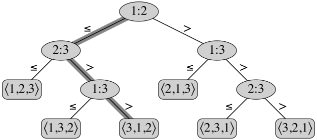



For en fast samling af $n$ elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde $h$ har højst $2^h$ blade (da det fulde træ har det).

# Sammenligningsbaseret sortering



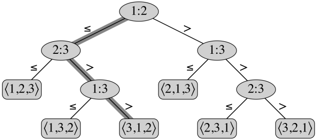

For en fast samling af $n$ elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde $h$ har højst $2^h$ blade (da det fulde træ har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

# Sammenligningsbaseret sortering




For en fast samling af $n$ elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

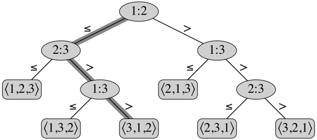
Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde $h$ har højst $2^h$ blade (da det fulde træ har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

# Sammenligningsbaseret sortering




For en fast samling af $n$ elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

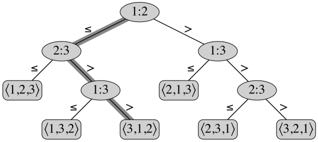
Et træ af højde $h$ har højst $2^h$ blade (da det fulde træ har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

$$= \log(1) + \log(2) + \ldots \log(n/2) \cdots + \log(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(\log(n) - 1)$$

# Sammenligningsbaseret sortering




For en fast samling af $n$ elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde $h$ har højst $2^h$ blade (da det fulde træ har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

$$= \log(1) + \log(2) + \ldots \log(n/2) \cdots + \log(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(\log(n) - 1)$$

$$h = \Omega(n \log n)$$

# Counting sort

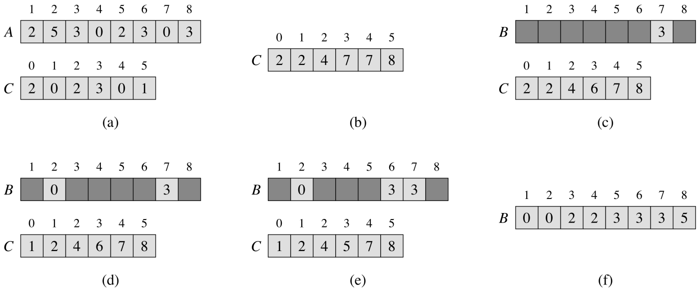
Elementer heltal: elementer kan bruges som array-indekser ($\neq$ at bruge sammenligninger på elementer).

Counting sort: Sorterer $n$ heltal af størrelse mellem 0 og $k$.

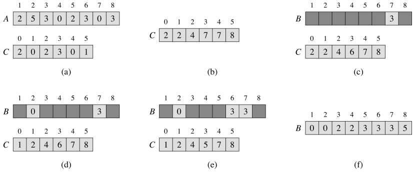
Inputarray: $A$ (længde $n$)

Outputarray: $B$ (længde $n$)

Array af tællere for hver mulig elementværdi: $C$ (længde $k+1$)



# Counting sort




$\text{Counting-Sort}(A, B, k)$
  **for** $i = 0$ **to** $k$
    $C[i] = 0$
  **for** $j = 1$ **to** $A.length$
    $C[A[j]]++$
  **for** $i = 1$ **to** $k$
    $C[i] = C[i] + C[i-1]$
  **for** $j = A.length$ **downto** $1$
    $B[C[A[j]]] = A[j]$
    $C[A[j]]--$

Tid: $O(n + k)$

Bemærk: stabil (da sidste løkke løber baglæns gennem både $A$ og $B$), dvs at elementer med ens værdier beholder deres indbyrdes plads.

# Radix sort

Radix sort: Sorterer $n$ heltal alle med $d$ cifre i base (radix) $k$.

(dvs. cifrene er heltal i $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$)

På figuren nedenfor er der 7 heltal med 3 cifre i base 10.

RADIX-SORT($A$,$d$)
  **for** $i = 1$ **to** $d$
    use a stable sort to sort $A$ on digit $i$ from right

| | | | |
|---|---|---|---|
| 329 | 720 | 720 | 329 |
| 457 | 355 | 329 | 355 |
| 657 | 436 | 436 | 436 |
| 839 | 457 | 839 | 457 |
| 436 | 657 | 355 | 657 |
| 720 | 329 | 457 | 720 |
| 355 | 839 | 657 | 839 |

Tid: $O(d(n+k))$ hvis der bruges Counting Sort i løkken.

Korrekthed:

Efter $i$'te iteration er løkken er $A$ sorteret hvis man kun kigger på de $i$ cifre mest til højre.

# Radix sort

Eksempel: 32-bits heltal

| 11011001 10011000 01101000 10110101 |
|---|

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

# Radix sort

Eksempel: 32-bits heltal

| 11011001 10011000 01101000 10110101 |

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Se som 2-cifrede tal i base $2^{16}$ (bemærk: sorteret orden er den samme)

| 11011001 10011000 | 01101000 10110101 |

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 2^{16}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{16} = 65.536$

# Radix sort

Eksempel: 32-bits heltal

| 11011001 10011000 01101000 10110101 |

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Se som 2-cifrede tal i base $2^{16}$ (bemærk: sorteret orden er den samme)

| 11011001 10011000 | 01101000 10110101 |

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 2^{16}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{16} = 65.536$

Se som 4-cifrede tal i base $2^{8}$ (bemærk: sorteret orden er den samme)

| 11011001 | 10011000 | 01101000 | 10110101 |

Radixsort sorterer disse i tid $O(4(n + 2^{8}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{8} = 256$