

Dynamisk programmering

Dynamisk programmering

Optimeringsproblem: man ønsker at finde bedste den kombinatoriske struktur (struktur opbygget af et endeligt antal enkeltdele) blandt mange mulige.

Eksempler: korteste rute, bedste opskæring af stof, bedste pakning af en lastbil.

Dynamisk programmering [Bellman, 1950-57]: et algoritme-konstruktionsprincip ("paradigme"). Normalt mest brugt til optimeringsproblemer.

Er et specialtilfælde af algoritme-konstruktionsprincippet Divide-and-Conquer. Dvs. er en rekursiv metode, som opbygger løsninger til større problemer ud fra løsninger til mindre problemer.

- ▶ Normalt i rekursive algoritmer: delproblemer typisk halvt så store, ingen gentagelser af delproblemer under rekursionen.
- ▶ Nogle rekursive metoder: kald af delproblemer hvis størrelse kun er reduceret med én. Der kan der opstå gentagelser blandt delproblemers delproblemer. Køretiden bliver derved eksponentiel.

Dynamisk programmering

Kernen i dynamisk programmering er følgende trick:

- ▶ Lav en tabel over løsninger på delproblemer, så disse kun skal løses en gang hver. Dette ændrer normalt køretiden fra eksponentiel til polynomiell.

Mere generelt bruges begrebet dynamisk programmering om

- ▶ Udvikling af rekursive løsninger for optimeringsproblemer, hvor nogle delproblemer i rekursionen kun er reduceret $O(1)$ i størrelse. Man bruger så tricket til at implementere den rekursive løsning effektivt.

Den kreative del er at finde den rekursive beskrivelse af løsningen. At derefter bruge tricket er ret ens fra problem til problem.

Dynamisk programmering

Den kreative del er at finde den rekursive beskrivelse af løsningen.

Følgende er ofte en god angrebsvinkel:

1. Hvad der kunne være en god beskrivelse af størrelsen af et (del)problem, udtrykt ved et, to eller evt. flere heltalsindekser.
2. Analyser hvordan en optimal løsning for en given størrelse problem må bestå af et "sidste valg" og "resten", hvor man om "resten" kan argumentere, at dette må være en optimal løsning for en mindre størrelse problem. Derved kan fås en rekursiv beskrivelse af værdien af løsninger.

Den sidste egenskab kaldes, at der er "optimale delproblemer".

Eksempler følger.

Eksempel

Du har en guldkæde med n led. Den kan deles i mindre længder (med n led tilsammen, dvs. ingen led går tabt). Guldsmeden køber guldkæder af forskellige længder til forskellige priser:

| | | | | | | | | | | |
|------------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|-----|
| længde i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... |
| pris p_i | \$1 | \$5 | \$8 | \$9 | \$10 | \$17 | \$17 | \$20 | \$24 | ... |

Hvordan skal du opdele din guldkæde for at optimere din salgspris?



(a)



(b)



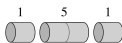
(c)



(d)



(e)



(f)



(g)



(h)

Optimale delproblemer

Observation: enhver opdeling af en kæde af længde n må bestå af:

- ▶ Et sidste stykke af længde $k \leq n$.
- ▶ En opdeling af resten, dvs. en opdeling af en kæde af længde $n - k$.

Den essentielle egenskab (optimale delproblemer):

For en *optimal* opdelingen af kæden af længde n , må opdelingen af resten selv være optimal for en kæde af længde $n - k$. For hvis der fandtes en ægte bedre opdeling af resten, kunne man bruge den i stedet og derved forbedre den optimale opdeling af kæden af længde n .

Kald *værdien* af en optimal opdeling af en kæde af længde n for $r(n)$.

Det er klart at $r(0) = 0$. Vi vil gerne finde $r(n)$ for $n > 0$.

Rekursiv formel for $r(n)$

Opsummering: en optimal opdeling T for længde n består af:

- ▶ Et sidste stykke med længde $k \leq n$.
- ▶ En optimal opdeling af resten, dvs. en optimal opdeling af en kæde af længde $n - k$.

Værdien $r(n)$ af T er derfor lig $p_k + r(n - k)$, så det lugter af rekursion.

Men: vi kender desværre ikke k . Derfor gør vi sådan:

Lad T_i (for $i = 1 \dots n$) være en opdelingen bestående af et sidste stykke af længde i , samt en optimal opdeling af resten.

T_k har værdi $p_k + r(n - k)$ lige som T , og er derfor optimal for længde n .

- ▶ Så mindst én af $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ er optimal for længde n .
- ▶ Naturligvis kan ingen T_i have en værdi bedre end optimal.
- ▶ Værdien af T_i er $p_i + r(n - i)$.

Heraf:

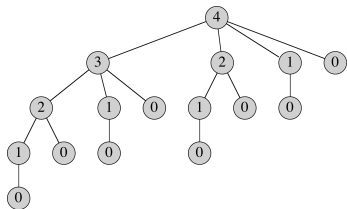
$$r(n) = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r(n - i)), \quad r(0) = 0$$

Beregne de optimale værdier

$$r(n) = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r(n - i)), \quad r(0) = 0$$

Dvs. $r(n)$ er (matematisk set) rekursivt defineret ud fra mindre instanser.

Er rekursion også en god løsning, algoritmisk set?



Man kan vise via induktion at der er 2^n knuder i rekursionstræet. Så køretiden vil blive $\Theta(2^n)$

Problemet er gentagelser blandt delproblemers delproblemer.

Brug en tabel

Fokuser i stedet på en tabel over værdien af de optimale løsninger.

Start: $r(0) = 0$

| | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $r(n)$ | 0 | | | | | | | | | | |

Et felt kan fyldes ud via

$$r(n) = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r(n - i))$$

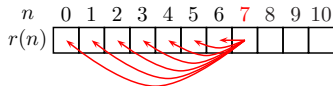
hvis de foregående felter er fyldt ud. Denne afhængighed kan vi illustrere:

| | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $r(n)$ | | | | | | | | | | | |

Deraf følger, at vi kan beregne $r(n)$ bottom-up, dvs. for stigende n

Køretid

$$r(n) = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r(n - i)), \quad r(0) = 0$$



Denne beregning kan laves med to simple for-loops (det inderste finder max, det ydre går gennem tabellen):

```
 $r[0] = 0$   
for  $k = 1$  to  $n$ :  
     $max = -\infty$   
    for  $i = 1$  to  $k$ :  
         $x = p[i] + r[k - i]$ :  
        if  $x > max$ :  
             $max = x$   
     $r[k] = max$ 
```

Tid: $O(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) = O(n^2)$

Eksempel

Brug

$$r(n) = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r(n - i)), \quad r(0) = 0$$

og tabellen over p_i :

| | | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| længde i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| pris p_i | 1 | 5 | 8 | 9 | 10 | 17 | 17 | 20 | 24 | 30 |

til at udfylde tabellen over $r(n)$ fra højre mod venstre:

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|----|
| længde n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| optimal værdi $r(n)$ | 0 | 1 | 5 | 8 | 10 | 13 | 17 | 18 | 22 | ... | |

Find selve løsningen

Tallet $r(n)$ er kun *værdien* af den optimale løsning. Hvad hvis vi gerne vil have *selve løsningen* (de enkelte længder, guldkæden skal brydes op i)?

Gem længden $s(n)$ af det *sidste stykke* for en optimal løsning for længde n .

$$r(n) = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + r(n - i)), \quad r(0) = 0$$

| | | | | | | | | | | |
|------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| længde i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| pris p_i | 1 | 5 | 8 | 9 | 10 | 17 | 17 | 20 | 24 | 30 |

| | | | | | | | | | | | |
|----------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| længde n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| optimal værdi $r(n)$ | 0 | 1 | 5 | 8 | 10 | 13 | 17 | 18 | 22 | 25 | 30 |
| sidste længde $s(n)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 6 | 1 | 2 | 3 | 10 |

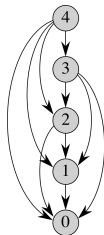
```
while  $n > 0$ 
    print  $s[n]$ 
     $n = n - s[n]$ 
```

Memoization

Rekursion: $O(2^n)$. Strukturert tabeludfyldning: $O(n^2)$

Kan de to kombineres? Ja.

```
GULDKÆDE( $n$ )  
  if  $n = 0$   
    return 0  
  else if  $r[n]$  allerede udfyldt i tabel  
    return  $r[n]$   
  else  
     $x = \max_{1 \leq i \leq n} (p_i + \text{GULDKÆDE}(n - i))$   
     $r[n] = x$   
    return  $x$ 
```



En kant (pil) i grafen, der viser delproblemers afhængighed af hinanden, vil blive en kant i rekursionstræet præcis én gang.

Så samme køretid $O(n^2)$ og pladsforbrug $O(n)$ som for bottom-up udfyldning af tabellen. Men nok dårligere konstanter i praksis.