

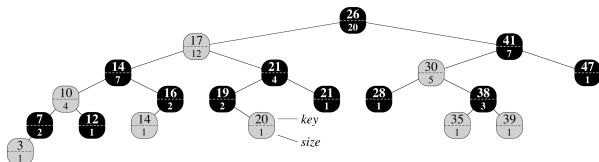
Binære søgetræer med ekstra information i knuderne

Tilføj ekstra information i knuderne

Konkret eksempel på ekstra information i knuder:

Alle knuder gemmer størrelsen af deres undertræ (dvs. antallet af knuder i deres undertræ).

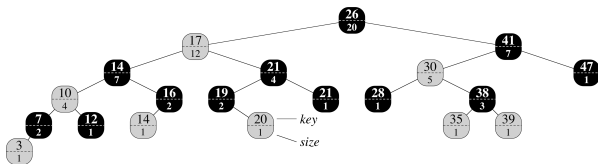
Et binært søgetræ (rød-sort) med denne information tilføjet:



Ny funktionalitet

Målet med ekstra information i knuderne er at tilføje ekstra funktionalitet. F.eks. kan man i eksemplet ovenfor (med størrelse af undertræer gemt i knuder) udføre flg. operationer i $O(\log n)$ tid:

- ▶ Find rang.
- ▶ Find nøgle som har en given rang.

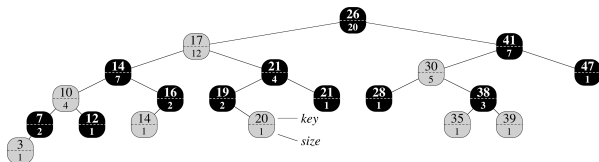


Her er **rang** elementets nummer i sorteret orden (blandt de gemte).

Element:	3	7	10	12	14	14	16	17	19	20	21	...
Rang:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Ny funktionalitet

- ▶ Find rang.
- ▶ Find nøgle som har en given rang.



OS-RANK(T, x)

```
 $r = x.left.size + 1$   
 $y = x$   
while  $y \neq T.root$   
  if  $y == y.p.right$   
     $r = r + y.p.left.size + 1$   
   $y = y.p$   
return  $r$ 
```

OS-SELECT(x, i)

```
 $r = x.left.size + 1$   
if  $i == r$   
  return  $x$   
elseif  $i < r$   
  return OS-SELECT( $x.left, i$ )  
else return OS-SELECT( $x.right, i - r$ )
```

Vedligehold den ekstra information i knuderne

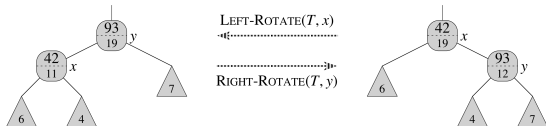
Antag følgende egenskab gælder for den ekstra information:

Hvis en knudes to børns værdier k_1 og k_2 allerede er korrekte, kan knudes egen værdi k beregnes i $O(1)$ tid. Blades værdier kan beregnes i $O(1)$ tid.

I eksemplet ovenfor: k kan findes som $1 + k_1 + k_2$.

Af antagelsen følger at værdierne kan vedligeholdes under updates uden ændring af $O(\log n)$ køretid:

- ▶ Indsættelse af ny knude: opdatér nedefra og op langs sti fra ny knude til roden (ingen andre knuder skal have værdi ændret).
- ▶ Sletning af knude: samme.
- ▶ Under den efterfølgende rebalancering: genberegnet for berørte knuder efter hver rotation og efter hvert skridt opad.



Andre eksempler

Hvis en knodes to børns værdier k_1 og k_2 allerede er korrekte, kan knodes egen værdi k beregnes i $O(1)$ tid.

Eksempler på anden information som kan vedligeholdes på samme måde:

- ▶ Maksimum af data-værdier i undertræet.
- ▶ Minimum af data-værdier i undertræet.
- ▶ Sum af data-værdier i undertræet.

Sådan information kan tilføje yderligere funktionalitet til træet. F.eks. kan man søge efter elementer med den maksimale dataværdi. Eller man kan finde gennemsnittet af dataværdierne i en knodes undertræ (gennemsnit = sum af værdier/antal knuder).