

Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer (DM507)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Torsdag den 26. juni 2008, kl. 9–13

— Løsningsforslag —

Opgave 1

Spørgsmål a:

431, 231, 222, 544, 754, 765, 747

222, 431, 231, 544, 747, 754, 765

222, 231, 431, 544, 747, 754, 765

Spørgsmål b:

	Best-case	Worst-case	Sorteret input
Insertion sort	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
Mergesort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Quicksort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$

Insertion sort:

Best-case er sorteret input. Da flyttes ingen elementer, og der foretages kun $n - 1$ sammenligninger.

I worst-case flyttes hvert element helt frem til starten. Da foretages $\frac{n(n-1)}{2}$ sammenligninger.

Mergesort:

Der bruges $\Theta(n \log n)$ tid på at flette, uanset hvordan input ser ud. Resten af algoritmen tager $\Theta(n)$ tid.

Quicksort:

Worst-case er sorteret input. Når partition udføres, kommer den ene side til at indeholde alle tal ud over pivot-elementet. Dermed udføres partition på sekvenser af længde $n, n - 1, \dots, 2$. For m elementer tager partition tid $\Theta(m)$.

I best-case deler partition altid sekvensen i to lige store dele. Da bliver der $\Theta(\log n)$ niveauer i rekursionen, som hver tager $\Theta(n)$ tid.

Opgave 2

Spørgsmål a:

$$\log_2 n, (\log_{10} n)^2, \sqrt{n}, n, 2^n$$

$\log_2 n \in o((\log_{10} n)^2)$:

$$\log_2 n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2}$$

Dvs.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{(\log_{10} n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2 \cdot (\log_{10} n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} n} = 0$$

$(\log_{10} n)^2 \in o(\sqrt{n})$:

Følger af opgave 3-2 a.

$\sqrt{n} \in o(n)$:

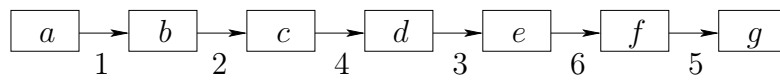
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$n \in o(2^n)$:

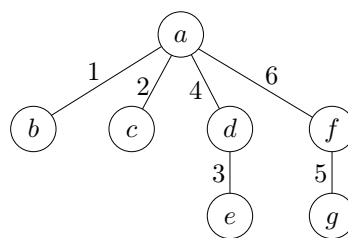
Følger af opgave 3-2 b.

Opgave 3

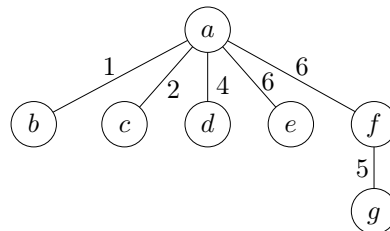
Spørgsmål a:



Spørgsmål b:

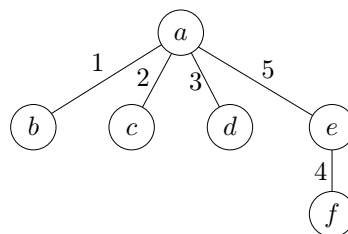


Spørgsmål c:

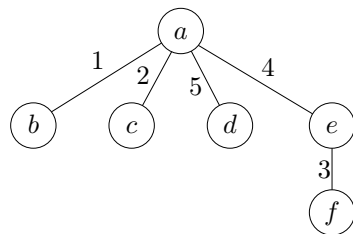


Spørgsmål d: Graferne (b), (c) og (d) kan resultere i det viste træ:

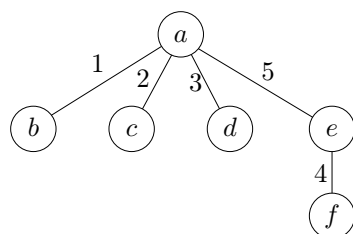
(b)



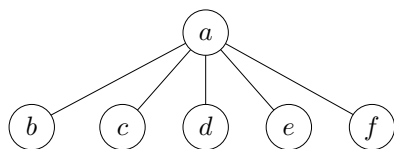
(c)



(d) f.eks.:

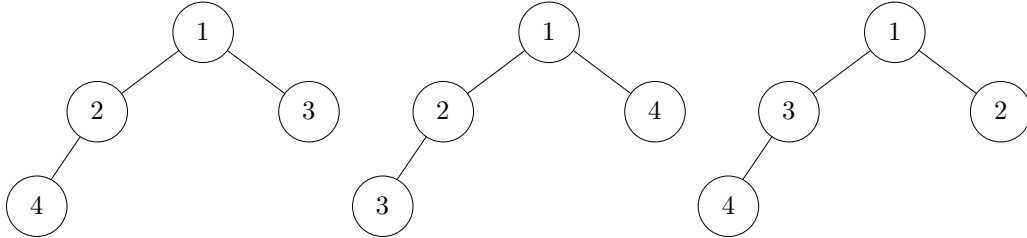


(a) ville derimod resultere i

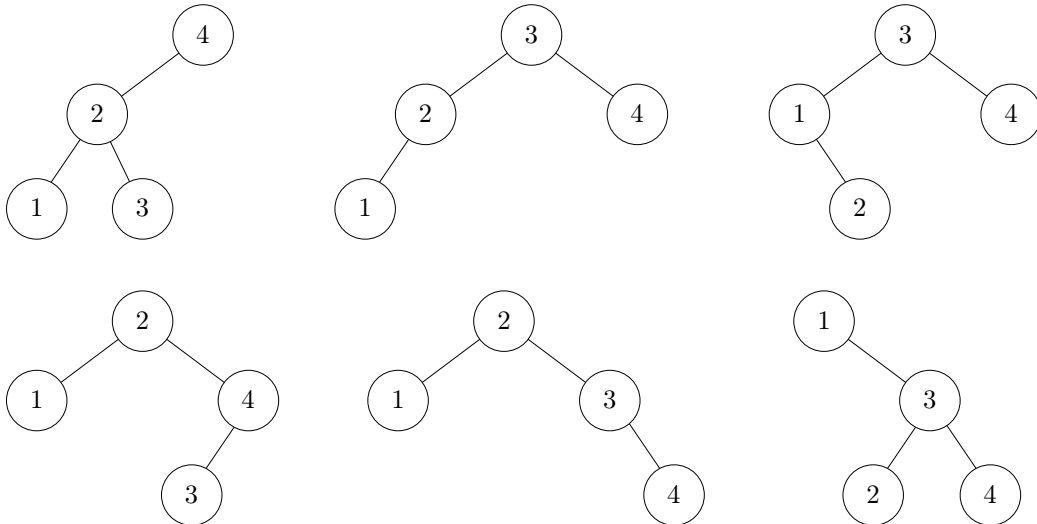


Opgave 4

Spørgsmål a:



Spørgsmål b:



Opgave 5

Spørgsmål a: *Basistilfælde:* I starten af første gennemløb er $c = 1$ og $i = k$. Dvs. $a^{B_{i+1}} = a^{B_{k+1}} = a^0 = 1 = c$.

Induktionsskridt: Bemærk først, at

$$B_i = \begin{cases} 2B_{i+1}, & \text{hvis } b_i = 0 \\ 2B_{i+1} + 1, & \text{hvis } b_i = 1 \end{cases}$$

Dvs.

$$a^{B_i} = \begin{cases} a^{2B_{i+1}} = (a^{B_{i+1}})^2, & \text{hvis } b_i = 0 \\ a^{2B_{i+1}+1} = (a^{B_{i+1}})^2 a, & \text{hvis } b_i = 1 \end{cases}$$

Iflg. induktionsantagelsen er $c = a^{B_{i+1}}$ ved for-løkkens start. Derefter sættes c lig med $c \cdot c$, hvilket er lig med $(a^{B_{i+1}})^2$.

Hvis $b_i = 0$, sker der ikke mere, og c forbliver lig med $(a^{B_{i+1}})^2$, hvilket i dette tilfælde er lig med a^{B_i} .

Hvis $b_i = 1$, ganges c nu med a , hvorefter c er lig med $(a^{B_{i+1}})^2 a$, som i dette tilfælde er lig med a^{B_i} .

I begge tilfælde bliver c altså lig med a^{B_i} . I starten af næste gennemløb, når i er blevet dekrementeret, svarer det til $c = a^{B_{i+1}}$.

Spørgsmål b: Når for-løkken slutter (dvs. når det for sidste gang checkes, om $i \geq 0$) er $i = -1$. Dermed giver invarianten $c = a^{B_0} = a^b$. Altså returneres a^b , som ønsket.

Opgave 6

Spørgsmål a:

x	a	b	c	d	e	f	g	h	i
$W(x)$	25	8	17	2	2	10	7	6	4

Spørgsmål b: b, h, i, g

Spørgsmål c:

TOTALWEIGHT(T)

$r \leftarrow \text{root}(T)$

return WEIGHT(r)

WEIGHT(x)

if $x = \text{NIL}$

return 0

if x er et blad

return $x.w$

else

$w_{\text{left}} \leftarrow \text{WEIGHT}(x.\text{left})$

$w_{\text{right}} \leftarrow \text{WEIGHT}(x.\text{right})$

return $\max\{x.w, w_{\text{left}} + w_{\text{right}}\}$

Lad n være antallet af knuder i træet.

Hver knude besøges en gang, og et besøg tager konstant tid. Dermed er køretiden $O(n)$

Pladsforbruget er $O(n)$.