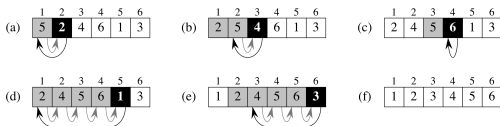


Invarianter

# Invarianter

**Invariant:** Et forhold, som vedligeholdes af algoritmen gennem (dele af) dens udførelse. Udgør ofte kernen af ideen bag algoritmen.

Eksempel: Insertionsort:



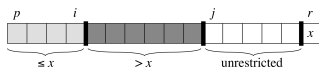
Invariant: Alt til venstre for det sorte felt er sorteret.

Når løkken stopper: hele array'et er til venstre for det sorte felt.

Af invarianten følger så: hele array'et er sorteret. Dvs. algoritmen er korrekt.

# Invarianter

Eksempel: Partition fra Quicksort:



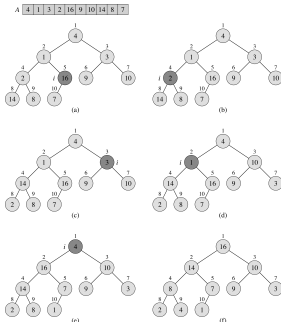
Invariant: Lysegrå del  $\leq x <$  mørkegrå del.

Når løkken stopper: Kun  $x$  er hvid, resten enten lysegrå eller mørkegrå.

Af invarianten følger så: array'et er delt i tre dele: " $\leq x$ ", " $> x$ " og  $x$  selv. Dvs. algoritmen er korrekt.

# Invarianter

Eksempel: Build-Heap:



Invariant:

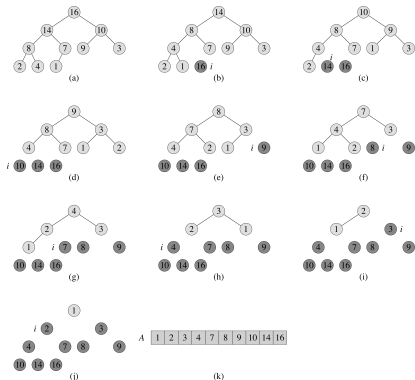
Undertræer, hvis rod har indeks større end den mørke knude, overholder heaporden.

Når løkken stopper: roden af hele træet har indeks større end den mørke knude.

Af invarianten følger så: Hele træet overholder heaporden. Dvs. algoritmen er korrekt.

# Invarianter

Eksempel: Heapsort (og enhver Selectionsort-baseret sortering):



Invariant: Det mørke er sorteret, og alt i det lyse er  $\leq$  det mørke.

Når løkken stopper: hele array'et er mørkt.

Af invarianten følger så: hele array'et er sorteret. Dvs. algoritmen er korrekt.

# Invarianter

Eksempel: søgning i binære søgetræer.

Invariant:

Hvis søgte element  $k$  findes, er det i det undertræ, vi er kommet til.

Algoritmen må stoppe fordi vi kigger på mindre og mindre undertræer. Når algoritmen stopper: enten er  $k$  fundet eller vi er endt i et tomt undertræ.

I det sidste tilfælde følger så af invarianten:  $k$  findes ikke i træet. Dvs. algoritmen er korrekt (i begge tilfælde).

# Invarianter

Invariant under rebalancering efter indsættelse i et rød-sort træ:

Der kan være to røde knuder i træet på en rod-blad sti højst ét sted i træet, men bortset herfra er de rød-sortede krav overholdt. Efter  $k$  iterationer er der  $k$  færre sorte mellem problemet og roden end i starten.

Invariant under rebalancering efter sletning i et rød-sort træ:

Der kan være én sværtet knude et sted i træet, og hvis sværtningen tælles med, er de rød-sortede krav overholdt. Efter  $k$  iterationer er der  $k$  færre sorte mellem problemet og roden end i starten.

Invarianten viser her flere ting:

- ▶ Samme case analyse virker hver gang (dækker altid alle muligheder, så algoritmen kan ikke gå i stå så længe problemet ikke er løst).
- ▶ Algoritmen må stoppe, enten ved at problemet er forsvundet, eller at det har nået roden (hvor det let løses).

Dvs. invarianten viser, at algoritmen er korrekt.

# Invarianter, mere formelt

**Invariant** for algoritme: et udsagn om indholdet af hukommelsen (variable, arrays, . . . ) som er sandt efter alle skridt.

Anvendelser:

- ▶ Ved algoritmens afslutning kan korrekthed udledes af udsagnet (samt de omstændigheder som fik algoritmen til at stoppe).
- ▶ Kan evt. bruges til at vise brugbare undervejs (f.eks. at en case analyse altid gælder).



# Induktion

At en invariant gælder efter alle skridt vises ved hjælp af induktion:

- 1) Invariant overholdt i starten
- 2) Invariant overholdt før et skridt  $\Rightarrow$  overholdt efter

$\Rightarrow$  Invariant altid overholdt

(hvor "skridt" ofte er en iteration af en løkke). Dvs: [Vis 1\)](#) og [2\)](#).

Induktion  $\sim$  "Dominoprincippet":

- 1) Brik 1 falder
- 2) Brik  $k$  falder  $\Rightarrow$  brik  $k + 1$  falder

$\Rightarrow$  Alle brikker falder



# Brug af invarianter

Invarianter kan bruges på to forskellige detalje-niveauer (med en glidende overgang imellem dem):

1. Som værktøj til at udvikle algoritme-ideer: **Med den rette invariant fanges essensen af metoden**, og algoritmen skal “blot” skrives ud fra at denne invariant skal vedligeholdes.
2. Som værktøj til at nedskrive kode (eller detaljeret pseudo-kode) og **visе den konkrete kode korrekt**.

I første anvendelse er blødere beskrivelser (tekst, figur) passende, jvf. eksemplerne tidligere. I anden anvendelse må man nedskrive invarianten præcist i termer af konkrete variable fra koden, samt argumentere via den konkrete kodes ændringer af disse.

Eksemplet nedenfor med at finde største element i et array illustrerer dette.

# Eksempel

Find største element i array:

```
max = A[0]
i = 1
while i < A.length
  if A[i] > max
    max = A[i]
  i++
```

**Invariant:** “Efter den  $k$ 'te iteration af while-løkken indeholder `max` den største værdi af  $A[0..(i-1)]$ ”.

Vises ved induktion på  $k$ .

