# Minimum udSpændende Træer (MST)

# Træer

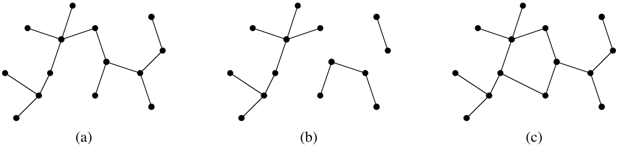
Et (frit/u-rodet) træ er en uorienteret graf $G = (V, E)$ som er

- Sammenhængende: der er en sti mellem alle par af knuder.
- Acyklisk: der er ingen kreds af kanter.

# Træer

Et (frit/u-rodet) træ er en uorienteret graf $G = (V, E)$ som er

- Sammenhængende: der er en sti mellem alle par af knuder.
- Acyklisk: der er ingen kreds af kanter.



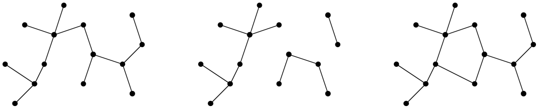

Træ Skov Graf med kreds (ikke træ)

(Uorienteret, acyklisk graf = skov af træer.).

# Træer

Sætning (B.2): For *uorienteret* graf $G = (V, E)$ er flg. ækvivalent (gælder det ene, gælder det andet):

- G er et træ (dvs. sammenhængende og acyklisk).
- G er sammenhængende, men er det ikke hvis nogen kant fjernes.
- G er sammenhængende og $m = n - 1$.
- G er acyklisk, men er det ikke hvis nogen kant tilføjes.
- G er acyklisk og $m = n - 1$.
- Mellem alle par af knuder er der præcis én vej.

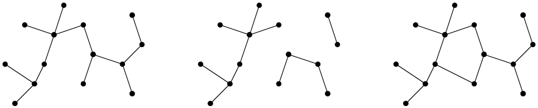


(a) (b) (c)

# Træer

Sætning (B.2): For *uorienteret* graf $G = (V, E)$ er flg. ækvivalent (gælder det ene, gælder det andet):

- G er et træ (dvs. sammenhængende og acyklisk).
- G er sammenhængende, men er det ikke hvis nogen kant fjernes.
- G er sammenhængende og $m = n - 1$.
- G er acyklisk, men er det ikke hvis nogen kant tilføjes.
- G er acyklisk og $m = n - 1$.
- Mellem alle par af knuder er der præcis én vej.



(a) (b) (c)

Bevis (ikke pensum): se appendix B.5.

Læs (pensum) appendix B.4 og B.5 for basale definitioner for grafer.

# Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for uorienteret, sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ.

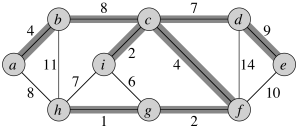
[Bemærk: *samme* knudemængde $V$.]

# Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for uorienteret, sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ.

[Bemærk: *samme* knudemængde $V$.]

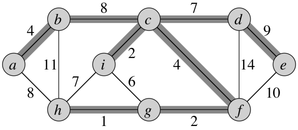


# Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for uorienteret, sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ.

[Bemærk: *samme* knudemængde $V$.]



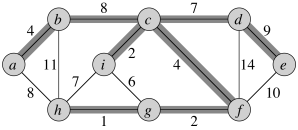

Iflg. sætning ovenfor har alle udspændende træer samme antal kanter ($m = n - 1$).

# Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for uorienteret, sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ.

[Bemærk: *samme* knudemængde $V$.]




Iflg. sætning ovenfor har alle udspændende træer samme antal kanter ($m = n - 1$).

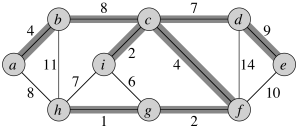
Minimum udSpændende Træ (MST) for en *vægtet* uorienteret sammenhængende graf $G$: et udspændende træ for $G$ som har mindst mulig sum af kantvægte (intet udspændende træ har mindre sum).

# Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for uorienteret, sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ.

[Bemærk: *samme* knudemængde $V$.]




Iflg. sætning ovenfor har alle udspændende træer samme antal kanter ($m = n - 1$).

Minimum udSpændende Træ (MST) for en *vægtet* uorienteret sammenhængende graf $G$: et udspændende træ for $G$ som har mindst mulig sum af kantvægte (intet udspændende træ har mindre sum).

Motivation: forbind punkter i et forsyningsnetværk (elektricitet, olie,...) billigst muligt. Kant i $G$: mulig forbindelse, vægt: pris for at etablere forbindelse. Dette var motivationen for den første algoritme for problemet (Borůvka, 1926, Østrig-Ungarn, nu Tjekkiet).

# Algoritmer for MST

Grundidé er grådig algoritme: byg MST ved at vælge kanterne én efter én ved hjælp af passende lokalt (dvs. lokalt i tid) godt valg.

# Algoritmer for MST

Grundidé er grådig algoritme: byg MST ved at vælge kanterne én efter én ved hjælp af passende lokalt (dvs. lokalt i tid) godt valg.

Korrekthed: via den sædvanlige invariant for korrekthed af grådige algoritmer: Hvad vi har bygget indtil nu er en del af en optimal løsning.

Dvs. følgende Invariant:

$$\boxed{\text{Der findes et MST som indeholder de valgte kanter } A.}$$

# Algoritmer for MST

Grundidé er grådig algoritme: byg MST ved at vælge kanterne én efter én ved hjælp af passende lokalt (dvs. lokalt i tid) godt valg.

Korrekthed: via den sædvanlige invariant for korrekthed af grådige algoritmer: Hvad vi har bygget indtil nu er en del af en optimal løsning.

Dvs. følgende Invariant:

$$\boxed{\text{Der findes et MST som indeholder de valgte kanter } A.}$$

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

Terminologi: safe kant for $A$ er en kant som kan tilføjes uden at ødelægge invarianten (mindst én må findes når invarianten gælder og $|A| < n - 1$).

# Algoritmer for MST

Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter $A$.

# Algoritmer for MST

Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter $A$.

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

# Algoritmer for MST

Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter $A$.

GENERIC-MST$(G, w)$

$A = \emptyset$
**while** $A$ is not a spanning tree
  find an edge $(u, v)$ that is safe for $A$
  $A = A \cup \{(u, v)\}$
**return** $A$

- Initialisering: Enhver sammenhængende graf har et mindst ét ST (via sætningen fra B.5, punkt 2 - fjern kanter til betingelsen nås), og har derfor et MST. Dette indeholder kantmængden $\emptyset$.

# Algoritmer for MST

Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter $A$.

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

- Initialisering: Enhver sammenhængende graf har et mindst ét ST (via sætningen fra B.5, punkt 2 - fjern kanter til betingelsen nås), og har derfor et MST. Dette indeholder kantmængden $\emptyset$.
- Vedligeholdelse: Per definition af safe.

# Algoritmer for MST

Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter $A$.

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

- Initialisering: Enhver sammenhængende graf har et mindst ét ST (via sætningen fra B.5, punkt 2 - fjern kanter til betingelsen nås), og har derfor et MST. Dette indeholder kantmængden $\emptyset$.
- Vedligeholdelse: Per definition af safe.
- Terminering: ethvert (M)ST indeholder præcis $n - 1$ kanter. Da $A$ vokser med én kant per iteration, giver invarianten at algoritmen terminerer, og at $A$ da er et MST ($A$ er indeholdt i et MST, og har samme antal kanter som dette, er derfor lig dette).

# Cuts

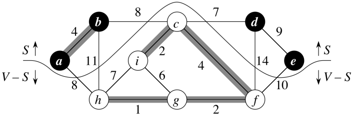
Hvordan finde en safe kant?

# Cuts

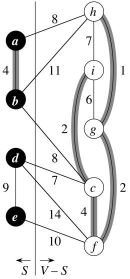
Hvordan finde en safe kant?

Cut: En delmængde $S \subseteq$ af knuderne.

Kan ses som en to-deling af knuderne i to mængder $S$ og $V - S$.




(a)



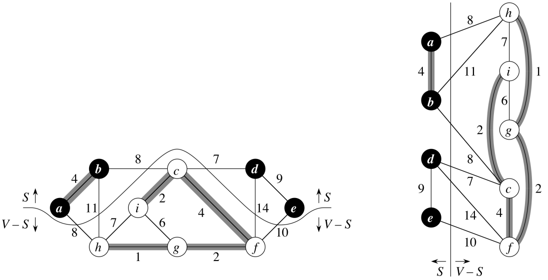

(b)

# Cuts

Hvordan finde en safe kant?

Cut: En delmængde $S \subseteq$ af knuderne.

Kan ses som en to-deling af knuderne i to mængder $S$ og $V - S$.




(a) (b)

Kant henover cut: en kant i $S \times (V - S)$.

# Cut-sætning

Sætning:

*Hvis*

- der eksisterer et MST som indeholder $A$,
- $S$ er et cut som $A$ ikke har kanter henover,
- $e$ er en letteste kant blandt kanterne henover cuttet,

*så*

- er $e$ safe for $A$ (dvs. der der eksisterer et MST som indeholder $A \cup \{e\}$).

# Cut-sætning

Bevis:

- Der findes et MST $T$ som indeholder $A$.
- Vi skal lave et MST $T'$ som indeholder $A \cup \{e\}$.

# Cut-sætning

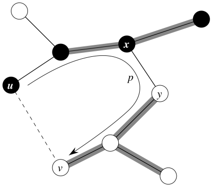
Bevis:

- Der findes et MST $T$ som indeholder $A$.
- Vi skal lave et MST $T'$ som indeholder $A \cup \{e\}$.

Lad $e = (u, v)$ være en letteste kant henover cuttet $S$.

Da $T$ er sammenhængdende, må der være en sti i $T$ mellem $u$ og $v$, hvorpå der er mindst én kant $(x, y)$ henover cuttet $S$.

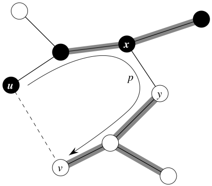
Lad $T'$ være $T$ med $(x, y)$ udskiftet til $e = (u, v)$:




(Viste kanter = $T$, fede kanter = $A$, cut er angivet med knudefarver.)

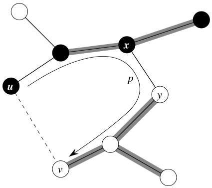
# Cut-sætning

Lad $T'$ være $T$ med $(x, y)$ udskiftet til $e = (u, v)$:



# Cut-sætning

Lad $T'$ være $T$ med $(x, y)$ udskiftet til $e = (u, v)$:




Som $T$ er $T'$ stadig sammenhængende (i alle stier kan $(x, y)$ erstattes af resten af stien fra $u$ til $v$, samt kanten $(u, v)$), og har $n$ knuder og $n - 1$ kanter. Det er derfor et træ (pga. sætning tidligere). Det kan kun være lettere end $T$. Det indeholder $A \cup \{e\}$ (da fjernede kant $(x, y)$ ikke er i $A$, da $A$ ingen kanter har henover cuttet.).

# Brug af cut-sætning

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter $A$.

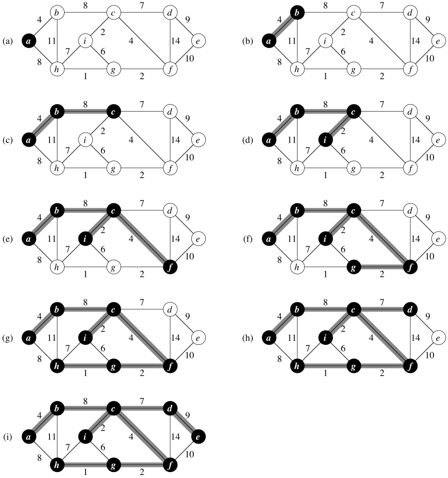
En ny kant $(u, v)$ med begge endepunkter i samme sammenhængskomponent i $G' = (V, A)$ vil introducere en kreds og dermed ødelægge invarianten. Sådanne er derfor aldrig safe.

En ny kant $(u, v)$ med endepunkterne i forskellige sammenhængskomponenter $C_1$ og $C_2$ i $G'$ er safe, hvis den er den letteste kant ud af enten $C_1$ eller $C_2$: brug cut-sætning på cuttet $C_1$ eller $C_2$.

Man ser nemt at en sådan kant vil ændre sammenhængskomponenterne i $G'$ ved at $C_1$ og $C_2$ slås sammen til én sammenhængskomponent.

# Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

Tager udgangspunkt i en (tilfældig) startknude $r$. Udvider hele tiden $r$'s sammenhængskomponent.



# Prim-Jarnik MST-algoritmen

Tager udgangspunkt i en (tilfældig) startknude $r$. Udvider hele tiden $r$'s sammenhængskomponent $C$.

En knude $v \in C - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i $v$.key og $v.\pi$.

$C - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

# Prim-Jarnik MST-algoritmen

Tager udgangspunkt i en (tilfældig) startknude $r$. Udvider hele tiden $r$'s sammenhængskomponent $C$.

En knude $v \in C - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i $v$.key og $v.\pi$.

$C - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

# Prim-Jarnik MST-algoritmen

Tager udgangspunkt i en (tilfældig) startknude $r$. Udvider hele tiden $r$'s sammenhængskomponent $C$.

En knude $v \in C - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i $v$.key og $v.\pi$.

$C - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = Ø
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ Ø
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

# Prim-Jarnik MST-algoritmen

Tager udgangspunkt i en (tilfældig) startknude $r$. Udvider hele tiden $r$'s sammenhængskomponent $C$.

En knude $v \in C - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i $v$.key og $v.\pi$.

$C - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid:

# Prim-Jarnik MST-algoritmen

Tager udgangspunkt i en (tilfældig) startknude $r$. Udvider hele tiden $r$'s sammenhængskomponent $C$.

En knude $v \in C - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i $v$.key og $v.\pi$.

$C - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid: $n$ Insert, $n$ ExtractMin, $m$ DecreaseKey

# Prim-Jarnik MST-algoritmen

Tager udgangspunkt i en (tilfældig) startknude $r$. Udvider hele tiden $r$'s sammenhængskomponent $C$.

En knude $v \in C - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i $v$.key og $v.\pi$.

$C - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid: $n$ INSERT, $n$ EXTRACTMIN, $m$ DECREASEKEY på prioritetskø af størrelse $O(n)$,

# Prim-Jarnik MST-algoritmen

Tager udgangspunkt i en (tilfældig) startknude $r$. Udvider hele tiden $r$'s sammenhængskomponent $C$.

En knude $v \in C - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i $v$.key og $v.\pi$.

$C - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid: $n$ INSERT, $n$ EXTRACTMIN, $m$ DECREASEKEY på prioritetskø af størrelse $O(n)$, i alt $O(m \log n)$.

# Kruskal MST-algoritmen (1956)

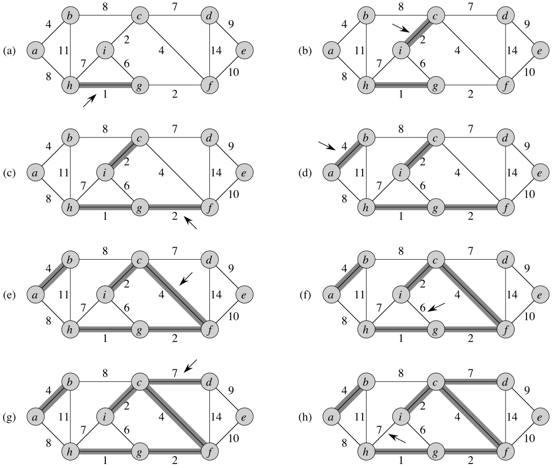
Forsøger at tilføje kanter til $A$ i global letteste-først-orden.

# Kruskal MST-algoritmen (1956)

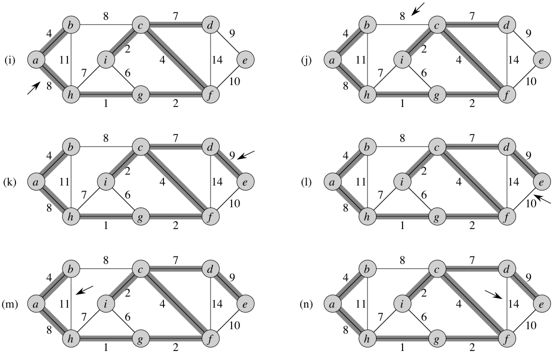
Forsøger at tilføje kanter til $A$ i global letteste-først-orden.

Recall: Vi kan kun tilføje kant $(u, v)$ til $A$ hvis der ikke laves en kreds, dvs. hvis $u$ og $v$ ligger i forskellige sammenhængskomponenter. Hvis $(u, v)$ tilføjes, vil disse to sammenhængskomponenter blive til én bagefter.

# Kruskal MST-algoritmen



# Kruskal MST-algoritmen



# Kruskal MST-algoritmen

Vedligeholder sammenhængskomponenterne i $G' = (V, A)$ ved hjælp af en *disjoint-set* datastruktur på $V$:

$$\textsc{Make-Set}(x),\ \textsc{Union}(x, y)\ \textsc{Find-Set}(x)$$

# Kruskal MST-algoritmen

Vedligeholder sammenhængskomponenterne i $G' = (V, A)$ ved hjælp af en *disjoint-set* datastruktur på $V$:

$$\textsc{Make-Set}(x),\ \textsc{Union}(x, y)\ \textsc{Find-Set}(x)$$

Mere præcist:

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

# Kruskal MST-algoritmen

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

Klart ud fra diskussion side 11 om sammenhængskomponenter at:

- Datastrukturen vedligeholder sammenhængskomponenterne i $G' = (V, A)$.
- En kant undersøgt i IF-sætningen har begge endepunkter i samme sammenhængskomponent lige efter efter IF-sætningen. Da sammenhængskomponenter i $G'$ kun slås sammen undervejs, gælder dette også for kanten i resten af algoritmen.

# Kruskal, korrekthed

Når algoritmen tilføjer en kant $(u, v)$ til $A$ ser vi på cuttet givet ved $u$'s sammenhængskomponent i $G' = (V, A)$. Vi kan bruge cut-sætningen, da $A$ har ikke kanter hen over dette cut (alle undersøgte kanter, herunder dem i $A$, har begge endepunkter i samme sammenhængskomponent i $G'$), og $(u, v)$ er en letteste kant henover dette cut (alle lettere kanter er undersøgt, og har derfor begge endepunkter i samme sammenhængskomponent i $G'$).

# Kruskal, korrekthed

Når algoritmen tilføjer en kant $(u, v)$ til $A$ ser vi på cuttet givet ved $u$'s sammenhængskomponent i $G' = (V, A)$. Vi kan bruge cut-sætningen, da $A$ har ikke kanter hen over dette cut (alle undersøgte kanter, herunder dem i $A$, har begge endepunkter i samme sammenhængskomponent i $G'$), og $(u, v)$ er en letteste kant henover dette cut (alle lettere kanter er undersøgt, og har derfor begge endepunkter i samme sammenhængskomponent i $G'$).

Når algoritmen stopper, er alle kanter undersøgt. Enhver kant i inputgrafen $G = (V, E)$ har derfor begge endepunkter i samme sammenhængskomponent i $G'$. Derfor har $G$ og $G'$ de samme sammenhængskomponenter (ingen sti i $G$ kan krydse mellem to sammenhængskomponenter i $G'$). Da $G$ er sammenhængende, har $G'$ nu én sammenhængskomponent. I starte havde $G'$ $n$ sammenhængskomponenter. Derfor er der lavet præcis $n - 1$ unions, og dermed er $|A| = n - 1$. Så $A$ er selv det MST (fra invarianten), som indeholder $A$.

# Kruskal, køretid

Arbejde:

Sortér $m$ kanter
Lav $n$ $\textsc{Make-Set}$, $n-1$ $\textsc{Union}$, $m$ $\textsc{Find-Set}$.

# Kruskal, køretid

Arbejde:

Sortér $m$ kanter
Lav $n$ $\textsc{Make-Set}$, $n-1$ $\textsc{Union}$, $m$ $\textsc{Find-Set}$.

Fra tidligere: der findes en datastruktur for disjoint-sets hvor

- $n$ $\textsc{Make-Set}(x)$
- $n-1$ $\textsc{Union}(x, y)$
- $m$ $\textsc{Find-Set}(x)$

tager i alt $O(m + n \log n)$ tid.

# Kruskal, køretid

Arbejde:

Sortér $m$ kanter
Lav $n$ $\textsc{Make-Set}$, $n-1$ $\textsc{Union}$, $m$ $\textsc{Find-Set}$.

Fra tidligere: der findes en datastruktur for disjoint-sets hvor

- $n$ $\textsc{Make-Set}(x)$
- $n-1$ $\textsc{Union}(x, y)$
- $m$ $\textsc{Find-Set}(x)$

tager i alt $O(m + n \log n)$ tid.

Samlet køretid for Kruskal er

$$O(m \log m)$$

eftersom $m \geq n-1$, da inputgrafen er sammenhængende.