Analyse af ombytningspuslespil

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?
- Hvilken algoritme bruger du?

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?
- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?
- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Afhænger det af input (startopstillingen)?

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?
- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Afhænger det af input (startopstillingen)?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?
- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Afhænger det af input (startopstillingen)?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- Er den grådige algoritme (sæt én på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte én på plads?

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?
- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Afhænger det af input (startopstillingen)?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- Er den grådige algoritme (sæt én på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte én på plads?
- Hvis grådig *er* bedst mulig, er der andre algoritmer som er lige så gode (eller *skal* man sætte én på plads hver gang for at være bedste mulig)?

Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside.

Spørgsmål:

- Hvilken bedste (laveste) score kan du opnå på 5 forsøg?
- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med *n* brikker?
- Afhænger det af input (startopstillingen)?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- Er den grådige algoritme (sæt én på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte én på plads?
- Hvis grådig *er* bedst mulig, er der andre algoritmer som er lige så gode (eller *skal* man sætte én på plads hver gang for at være bedste mulig)?
- Mere generelt, kan vi præcist karakterisere de bedst mulige algoritmer?

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \ldots, n$, nummereret efter opstillingen når puslespillet er løst:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 10 & 14 & 3 \\ \hline 1 & 11 & 9 & 15 \\ \hline 8 & 7 & 2 & 12 \\ \hline 4 & 13 & 6 & 16 \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}$$

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \ldots, n$, nummereret efter opstillingen når puslespillet er løst:

5	10	14	3
1	11	9	15
8	7	2	12
4	13	6	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

NB: dette kan også ses som et array/en liste:

5	10	14	3	1	11	9	15	8	7	2	12	4	13	6	16

Dette gør vi til opgavetimerne (i Java-opgaverne)

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \ldots, n$, nummereret efter opstillingen når puslespillet er løst:

5	10	14	3
1	11	9	15
8	7	2	12
4	13	6	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

NB: dette kan også ses som et array/en liste:

5	10	14	3	1	11	9	15	8	7	2	12	4	13	6	16

Dette gør vi til opgavetimerne (i Java-opgaverne)

En opstilling af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$ i et array af længde n kaldes også en permutation.

Den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  vælg en brik ikke på plads
  byt den med brikken på dens plads
```

Den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  vælg en brik ikke på plads
  byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

Den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  vælg en brik ikke på plads
  byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

Den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  vælg en brik ikke på plads
  byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

Den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  vælg en brik ikke på plads
  byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

Den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  vælg en brik ikke på plads
  byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det minimale antal ombytninger?

Den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  vælg en brik ikke på plads
  byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det minimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: højst to brik kommer på plads. Derfor mindst $(n - t)/2$ ombytninger.

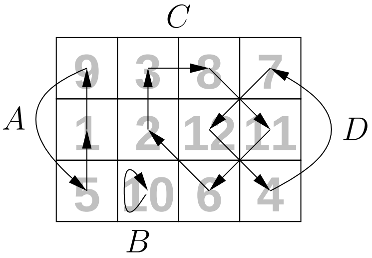
Kredse

Bedre analyse end "mellem $(n-t)/2$ og $n-t$ ombytninger"?

Kredse

Bedre analyse end “mellem $(n-t)/2$ og $n-t$ ombytninger”?

Observation: en permutation giver på naturlig måde anledning til en samling kredse (engelsk: cycles):

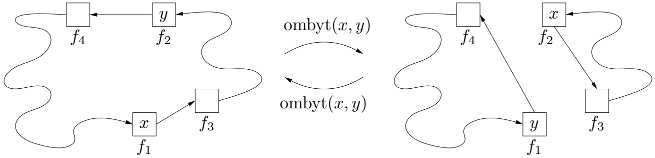


Idé: Et tal (en brik) t peger på den plads, hvor den skal stå, nemlig pladsen med nummer t.

Kredse og ombytninger

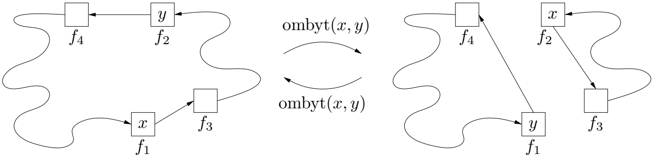
Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Kredse og ombytninger

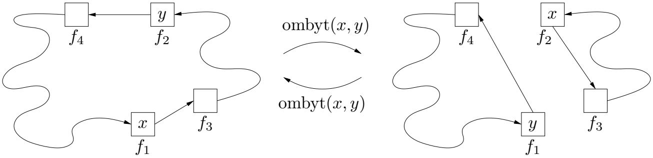
Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Observation: En brik er på den rigtige plads ⇔ brik er i en kreds af længde én.

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:

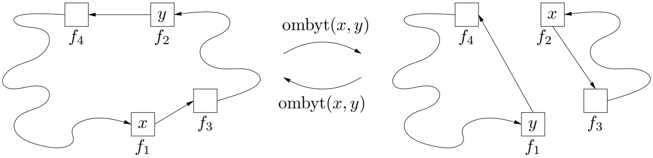


Observation: En brik er på den rigtige plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst $\Leftrightarrow$ der er n kredse.

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



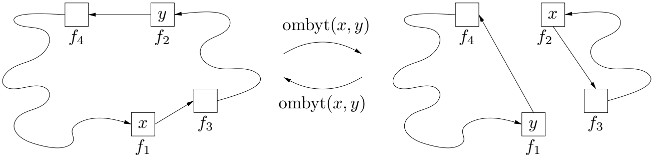
Observation: En brik er på den rigtige plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst $\Leftrightarrow$ der er n kredse.

Konklusion: Et puslespil med n brikker og k kredse i startopstillingen kræver mindst $n - k$ ombytninger, og man kan altid gøre det med $n - k$ ombytninger (f.eks. via den grådige algoritme, som i hvert skridt deler en kreds af længde t i to kredse af længde $t - 1$ og 1).

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Observation: En brik er på den rigtige plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst $\Leftrightarrow$ der er n kredse.

Konklusion: Et puslespil med n brikker og k kredse i startopstillingen kræver mindst $n - k$ ombytninger, og man kan altid gøre det med $n - k$ ombytninger (f.eks. via den grådige algoritme, som i hvert skridt deler en kreds af længde t i to kredse af længde $t - 1$ og 1).

Konklusion: En algoritme bruger det optimale antal ombytninger $(n - k)$ hvis og kun hvis hver ombytning er med to brikker som er i samme kreds.

Forventet antal kredse

Sætning (uden bevis her): Det forventede antal kredse i en tilfældig permutation er

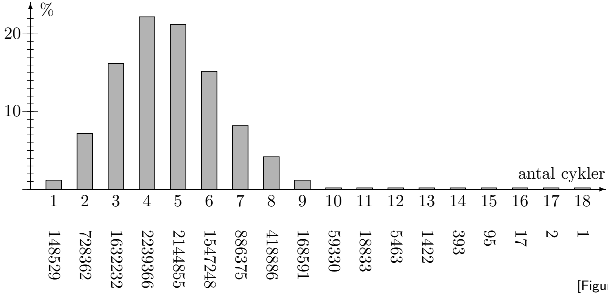
$$H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$$

Forventet antal kredse

Sætning (uden bevis her): Det forventede antal kredse i en tilfældig permutation er

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$$

Ved simulering (afprøvning, 10.000.000 tilfældige permutationer) for $n = 64$ ses følgende fordeling af antallet af permutationer:



[Figur: Gerth Brodal]