# Algoritmer og datastrukturer

## Introduktion til kurset

Rolf Fagerberg

Forår 2021

# Hvem er vi?

Underviser:

- Rolf Fagerberg, Institut for Matematik og Datalogi (IMADA)
  Forskningsområde: algoritmer og datastrukturer

# Hvem er vi?

Underviser:

- Rolf Fagerberg, Institut for Matematik og Datalogi (IMADA)
  Forskningsområde: algoritmer og datastrukturer

Deltagere:

- BA i Datalogi (2. sem.)
- BA i Software Engineering (4. sem.)
- BA i Matematik-Økonomi (4. sem.)
- BA i Anvendt Matematik (4. sem.)
- BA sidefag i Datalogi (6. sem.)
- KA profil i Data Science (8. sem.)

# Hvem er vi?

Underviser:

- Rolf Fagerberg, Institut for Matematik og Datalogi (IMADA)
  Forskningsområde: algoritmer og datastrukturer

Deltagere:

- BA i Datalogi (2. sem.)
- BA i Software Engineering (4. sem.)
- BA i Matematik-Økonomi (4. sem.)
- BA i Anvendt Matematik (4. sem.)
- BA sidefag i Datalogi (6. sem.)
- KA profil i Data Science (8. sem.)

Stor diversitet: forskellige semestre i uddannelsen, forskellige mængder af programmering og af matematiske fag på uddannelsen.

# Tre kurser i ét!

DM507/DS814:

- Algoritmer og datastrukturer (8 ETCS)
- Programmeringsprojekt i tre dele (2 ETCS)
- Skriftlig MC eksamen (3 timer)

T510040101:

- Algoritmer og datastrukturer (8 ETCS)
- Diskret matematik (2 ETCS)
- Skriftlig MC eksamen (3:45 timer)

Diskret matematik har separate forelæsninger (Lene Monrad Favrholdt) og øvelsestimer. Mandage 12-14 i ti uger.

Itslearning: ét kursusrum for DM507/DS814, ét kursusrum for T510040101.

# Kursets format (DM507/DS814)

## Forudsætninger:

Programmering i Java eller Python, lidt matematisk modenhed

## Format:

Forelæsninger (f-timer).
Opgaveregning (e-timer). Med instruktor.
Arbejde selv og i studiegrupper

## Eksamenform:

Skriftlig eksamen (juni), 8 ECTS:

Multiple-choice (med bøger, noter, computer). Karakter efter 7-skala. Mål: check af kendskab til stoffet. [NB: reeksamen er mundtlig.]

Projekt undervejs, 2 ECTS, Java eller Python (frit valg):

I flere dele. Karakter B/IB. Skal ikke (længere) bestås for at gå til skriftlig eksamen. Mål: træne overførsel af stoffet til praksis (programmering).

# Kursets format (T510040101)

Forudsætninger:

Programmering i Java (eller Python), lidt matematisk modenhed

Format:

Forelæsninger (f-timer).
Opgaveregning (e-timer). Med instruktor.
Arbejde selv og i studiegrupper

Eksamenform:

Skriftlig eksamen (juni), 10 ECTS:

Multiple-choice (med bøger, noter, computer). Karakter efter 7-skala. Mål: check af kendskab til stoffet. [NB: reeksamen er mundtlig.]

# Materialer i algoritmer og datastrukturer

Lærebog:

Cormen, Leiserson, Rivest, Stein:
*Introduction to Algorithms*, 3rd edition, 2009.

# Materialer i algoritmer og datastrukturer

Lærebog:

Cormen, Leiserson, Rivest, Stein:
*Introduction to Algorithms*, 3rd edition, 2009.

# Materialer i algoritmer og datastrukturer

Lærebog:

Cormen, Leiserson, Rivest, Stein:
*Introduction to Algorithms*, 3rd edition, 2009.

Andet læremateriale på kursets webside:

Slides fra forelæsninger
Links til videoer
Opgaver til øvelsestimer
Tidligere eksamenssæt
Projektet

# Materialer i algoritmer og datastrukturer

Lærebog:

Cormen, Leiserson, Rivest, Stein:
*Introduction to Algorithms*, 3rd edition, 2009.

Andet læremateriale på kursets webside:

Slides fra forelæsninger
Links til videoer
Opgaver til øvelsestimer
Tidligere eksamenssæt
Projektet

Stoffet findes i fuld detalje i *tre* udgaver: lærebog, slides, video. Brug de dele, som virker bedst for dig (gerne flere dele).

# Forventet arbejdsindsats (DM507/DS814)

- Skim stof før forelæsning: 0,5 timer
- Forelæsning: 2 timer
- Læs stof efter forelæsning: 1,5 timer
- Opgaveregning (hjemme): 3 timer
- Opgaveregning (klasse): 2 timer

# Forventet arbejdsindsats (DM507/DS814)

- Skim stof før forelæsning: 0,5 timer $\Leftarrow$ mindst vigtig
- Forelæsning: 2 timer
- Læs stof efter forelæsning: 1,5 timer
- Opgaveregning (hjemme): 3 timer $\Leftarrow$ mest vigtig
- Opgaveregning (klasse): 2 timer $\Leftarrow$ mest vigtig

# Forventet arbejdsindsats (DM507/DS814)

- Skim stof før forelæsning: 0,5 timer $\Leftarrow$ mindst vigtig
- Forelæsning: 2 timer
- Læs stof efter forelæsning: 1,5 timer
- Opgaveregning (hjemme): 3 timer $\Leftarrow$ mest vigtig
- Opgaveregning (klasse): 2 timer $\Leftarrow$ mest vigtig

Ovenstående i gennemsnit 1.5 gang per uge over 14 uger. Dertil følgende én gang:

- Projektet: 15+15+25 timer
- Eksamenslæsning: 40 timer
- Spørgetime og eksamen: 6 timer

# Forventet arbejdsindsats (DM507/DS814)

- Skim stof før forelæsning: 0,5 timer $\Leftarrow$ mindst vigtig
- Forelæsning: 2 timer
- Læs stof efter forelæsning: 1,5 timer
- Opgaveregning (hjemme): 3 timer $\Leftarrow$ mest vigtig
- Opgaveregning (klasse): 2 timer $\Leftarrow$ mest vigtig

Ovenstående i gennemsnit 1.5 gang per uge over 14 uger. Dertil følgende én gang:

- Projektet: 15+15+25 timer
- Eksamenslæsning: 40 timer
- Spørgetime og eksamen: 6 timer

I alt: $14 \cdot 1.5 \cdot 9 + 55 + 40 + 6 = 290$ timer

# Forventet arbejdsindsats (DM507/DS814)

- Skim stof før forelæsning: 0,5 timer $\Leftarrow$ mindst vigtig
- Forelæsning: 2 timer
- Læs stof efter forelæsning: 1,5 timer
- Opgaveregning (hjemme): 3 timer $\Leftarrow$ mest vigtig
- Opgaveregning (klasse): 2 timer $\Leftarrow$ mest vigtig

Ovenstående i gennemsnit 1.5 gang per uge over 14 uger. Dertil følgende én gang:

- Projektet: 15+15+25 timer
- Eksamenslæsning: 40 timer
- Spørgetime og eksamen: 6 timer

I alt: $14 \cdot 1.5 \cdot 9 + 55 + 40 + 6 = 290$ timer

10 ECTS = 1/6 årsværk = 1650/6 timer = 275 timer

# Forventet arbejdsindsats (T510040101)

- Skim stof før forelæsning: 0,5 timer $\Leftarrow$ mindst vigtig
- Forelæsning: 2 timer
- Læs stof efter forelæsning: 1,5 timer
- Opgaveregning (hjemme): 3 timer $\Leftarrow$ mest vigtig
- Opgaveregning (klasse): 2 timer $\Leftarrow$ mest vigtig

Ovenstående i gennemsnit 1.5 per uge over 14 uger (Rolf) og 0.5 gang per uge over 10 uger (Lene). Dertil følgende én gang:

- Eksamenslæsning: 40 timer
- Spørgetime og eksamen: 6 timer

I alt: $(14 \cdot 1.5 + 10 \cdot 0.5) \cdot 9 + 40 + 6 = 280$ timer

10 ECTS $= 1/6$ årsværk $= 1650/6$ timer $= 275$ timer

# Kursets formål og plads i det store billede

Generelt mål i IT: Få computer til at udføre en opgave.

Relaterede spørgsmål:

- Hvordan skrives programmer?
  Programmering, programmeringssprog, software engineering.
- Hvordan skal programmet løse opgaven?
  Algoritmer og datastrukturer, databasesystemer, lineær algebra med anvendelser, data mining og machine learning.
- (Hvor godt) er det overhovedet muligt at løse opgaven?
  Nedre grænser, kompleksitet, beregnelighed.
- Hvordan fungerer maskinen der udfører opgaven?
  Baggrundsviden om computerarkitektur og operativsystemer.

# Kursets formål og plads i det store billede

Generelt mål i IT: Få computer til at udføre en opgave.

Relaterede spørgsmål:

- Hvordan skrives programmer?
  Programmering, programmeringssprog, software engineering.
- Hvordan skal programmet løse opgaven? $\Leftarrow$ DM507
  Algoritmer og datastrukturer, databasesystemer, lineær algebra med anvendelser, data mining og machine learning.
- (Hvor godt) er det overhovedet muligt at løse opgaven?
  Nedre grænser, kompleksitet, beregnelighed.
- Hvordan fungerer maskinen der udfører opgaven?
  Baggrundsviden om computerarkitektur og operativsystemer.

# Fokus: *Hvordan* skal programmet løse opgaven?

**Algoritme** = løsningsmetode.

Tilpas præcist skrevet ned: præcis tekst, pseudo-kode, flow-diagrammer, formler,...

**Datastruktur** = data + effektive operationer herpå.

Forskellige datastrukturer gemmer forskellige typer data og/eller tilbyder forskellige operationer. Har stor anvendelse som delelement i algoritmer.

Relevante opgaver for enhver beregningsopgave:

1. Find (mindst) én algoritme der løser opgaven.
2. Sammenlign flere algoritmer der løser opgaven.
3. Hvad er den bedste algoritme der kan findes?

# Udvikling og vurdering af algoritmer

1. Find (mindst) én algoritme der løser opgaven.
2. Sammenlign flere algoritmer der løser opgaven.
3. Hvad er den bedste algoritme der kan findes?

# Udvikling og vurdering af algoritmer

1. Find (mindst) én algoritme der løser opgaven.
2. Sammenlign flere algoritmer der løser opgaven.
3. Hvad er den bedste algoritme der kan findes?

Punkt 1: Kræver ideer, tænkearbejde, erfaring, og en værktøjskasse af kendte algoritmer. Korrekthed: ved analyse eller implementation/afprøvning?

# Udvikling og vurdering af algoritmer

1. Find (mindst) én algoritme der løser opgaven.
2. Sammenlign flere algoritmer der løser opgaven.
3. Hvad er den bedste algoritme der kan findes?

Punkt 1: Kræver ideer, tænkearbejde, erfaring, og en værktøjskasse af kendte algoritmer. Korrekthed: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Punkt 2: Kræver definition af hvad er kvalitet. Sammenligning: ved analyse eller implementation/afprøvning?

# Udvikling og vurdering af algoritmer

1. Find (mindst) én algoritme der løser opgaven.
2. Sammenlign flere algoritmer der løser opgaven.
3. Hvad er den bedste algoritme der kan findes?

Punkt 1: Kræver ideer, tænkearbejde, erfaring, og en værktøjskasse af kendte algoritmer. Korrekthed: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Punkt 2: Kræver definition af hvad er kvalitet. Sammenligning: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Analyse: Giver høj sikkerhed for korrekthed. Sparer implementationsarbejde. Sammenligning upåvirket af: maskine, sprog, programmør, konkrete input. Afprøvning: giver konkret feedback, fanger andre ting end analyse.

# Udvikling og vurdering af algoritmer

1. Find (mindst) én algoritme der løser opgaven.
2. Sammenlign flere algoritmer der løser opgaven.
3. Hvad er den bedste algoritme der kan findes?

Punkt 1: Kræver ideer, tænkearbejde, erfaring, og en værktøjskasse af kendte algoritmer. Korrekthed: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Punkt 2: Kræver definition af hvad er kvalitet. Sammenligning: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Analyse: Giver høj sikkerhed for korrekthed. Sparer implementationsarbejde. Sammenligning upåvirket af: maskine, sprog, programmør, konkrete input. Afprøvning: giver konkret feedback, fanger andre ting end analyse.

I alle byggefag analyserer og planlægger man før man bygger (tænk storebæltsbro). Din fremtidige chef vil forlange det!

# Udvikling og vurdering af algoritmer

1. Find (mindst) én algoritme der løser opgaven.
2. Sammenlign flere algoritmer der løser opgaven.
3. Hvad er den bedste algoritme der kan findes?

Punkt 1: Kræver ideer, tænkearbejde, erfaring, og en værktøjskasse af kendte algoritmer. Korrekthed: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Punkt 2: Kræver definition af hvad er kvalitet. Sammenligning: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Analyse: Giver høj sikkerhed for korrekthed. Sparer implementationsarbejde. Sammenligning upåvirket af: maskine, sprog, programmør, konkrete input. Afprøvning: giver konkret feedback, fanger andre ting end analyse.

I alle byggefag analyserer og planlægger man før man bygger (tænk storebæltsbro). Din fremtidige chef vil forlange det!

(Bemærk: Punkt 3 kan *kun* afklares med analyse.)

# Udvikling og vurdering af algoritmer

1. Find (mindst) én algoritme der løser opgaven.
2. Sammenlign flere algoritmer der løser opgaven.
3. Hvad er den bedste algoritme der kan findes?

Punkt 1: Kræver ideer, tænkearbejde, erfaring, og en værktøjskasse af kendte algoritmer. Korrekthed: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Punkt 2: Kræver definition af hvad er kvalitet. Sammenligning: ved analyse eller implementation/afprøvning?

Analyse: Giver høj sikkerhed for korrekthed. Sparer implementationsarbejde. Sammenligning upåvirket af: maskine, sprog, programmør, konkrete input. Afprøvning: giver konkret feedback, fanger andre ting end analyse.

I alle byggefag analyserer og planlægger man før man bygger (tænk storebæltsbro). Din fremtidige chef vil forlange det!

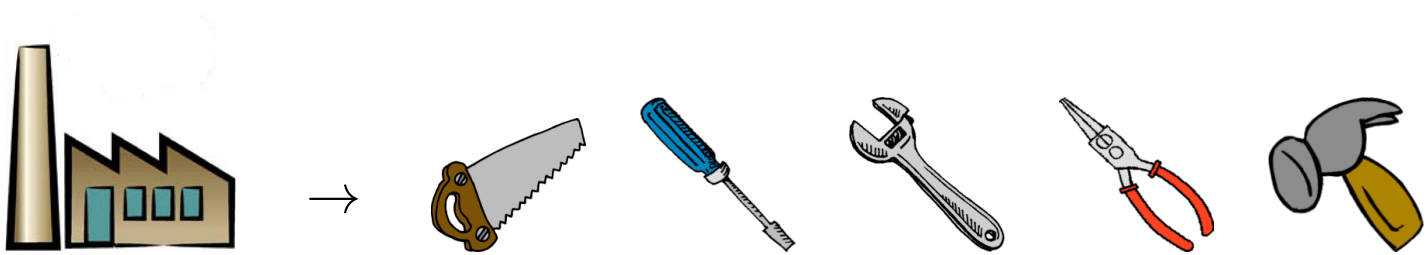
(Bemærk: Punkt 3 kan *kun* afklares med analyse.)

DM507 vil have mest fokus på analyse, lidt mindre på implementation.

# Målsætning for kurset

# Målsætning for kurset

DM507 giver dig en værktøjskasse af algoritmer for fundamentale opgaver, samt metoder til at udvikle og analysere nye algoritmer og varianter af eksisterende.



# Målsætning for kurset

Regneøvelser og programmeringsprojekter øger din forståelse for værktøjerne og træner dig i brug af værktøjskassen.

# Målsætning for kurset

Regneøvelser og programmeringsprojekter øger din forståelse for værktøjerne og træner dig i brug af værktøjskassen.

Undervejs begejstres du måske også over smarte og elegante ideer i algoritmer og analyser.

# Konkret indhold af kurset

# Konkret indhold af kurset

Algoritmer:

- Analyse af algoritmer: korrekthed og køretid
- Del og hersk algoritmer
- Grådige algoritmer
- Dynamisk programmering
- Sortering
- Graf-algoritmer
- Huffman-kodning

Datastrukturer:

- Ordbøger (søgetræer og hashing)
- Prioritetskøer (heaps)
- Disjunkte mængder

# Algoritmeanalyse

# Algoritmeanalyse

Mindstekrav til algoritmer for at løse et problem:

- Stopper for alle input (aldrig uendelig løkke).
- Korrekt output når stopper (giver et svar på vores problem).

# Algoritmeanalyse

Mindstekrav til algoritmer for at løse et problem:

- Stopper for alle input (aldrig uendelig løkke).
- Korrekt output når stopper (giver et svar på vores problem).

Kvalitet af algoritmer som opfylder mindstekrav:

- Hastighed
- Pladsforbrug
- Kompleksitet af implementation
- Ekstra egenskaber (problemspecifikke), f.eks. stabilitet af sortering.

# Algoritmeanalyse

Mindstekrav til algoritmer for at løse et problem:

- Stopper for alle input (aldrig uendelig løkke).
- Korrekt output når stopper (giver et svar på vores problem).

Kvalitet af algoritmer som opfylder mindstekrav:

- Hastighed
- Pladsforbrug
- Kompleksitet af implementation
- Ekstra egenskaber (problemspecifikke), f.eks. stabilitet af sortering.

For dette kræves følgende ingredienser: klar beskrivelse af problem og maskine (modeller), en definition af kvalitet, samt en værktøjskasse af analyseredskaber.

# Ingredienser i algoritmeanalyse

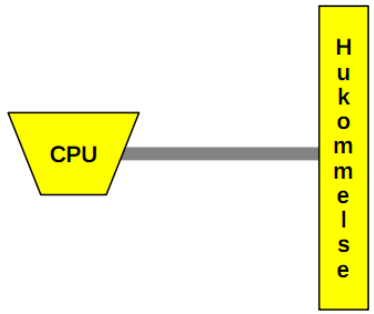
I kurset skal vi møde:

- Model af problem. Individuelt for hvert problem.
- Model af maskine. Ofte RAM-modellen (alias von Neumann modellen).
- Mål for ressourceforbrug (tid og plads).
- Matematiske analyseværktøjer: Løkkeinvarianter, induktion, rekursionsligninger.

Vi uddyber de tre sidste over de næste par sider.

# RAM-modellen

# RAM-modellen




- En CPU
- En hukommelse ($\sim$ uendeligt array af celler).
- Et antal basale operationer: *add*, *sub*, *mult*, *shift*, *compare*, *flyt dataelement*, *jump i program* (*løkke*, *forgrening*, *metodekald*). Disse antages alle at tage samme tid.

- Tid for en algoritme: antal basale operationer udført.
- Plads for en algoritme: maks antal optagne hukommelsesceller.

# Måle ressourceforbrug

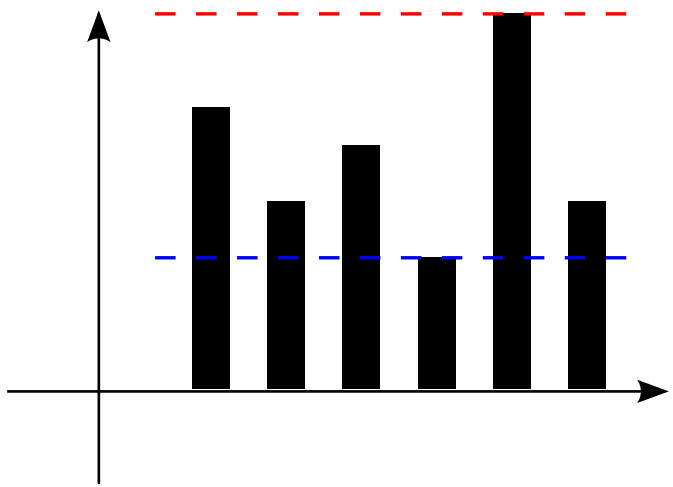
# Måle ressourceforbrug

For en givet størrelse $n$ af input er der ofte mange forskellige input instanser. Algoritmen har som regel forskelligt ressourceforbrug på hver af disse. Hvilket skal vi bruge til at vurdere ressourceforbruget?

# Måle ressourceforbrug

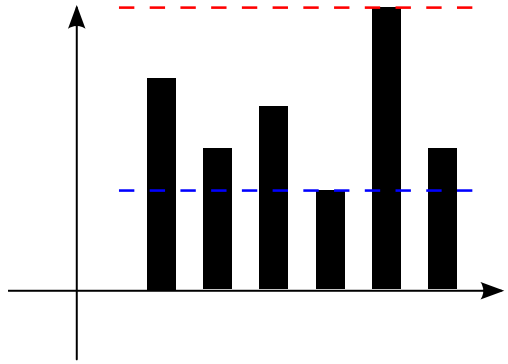
For en givet størrelse $n$ af input er der ofte mange forskellige input instanser. Algoritmen har som regel forskelligt ressourceforbrug på hver af disse. Hvilket skal vi bruge til at vurdere ressourceforbruget?

- Worst case (max over alle input af størrelse $n$)
- Average case (gennemsnit over en fordeling af input af størrelse $n$)
- Best case (min over alle input af størrelse $n$)



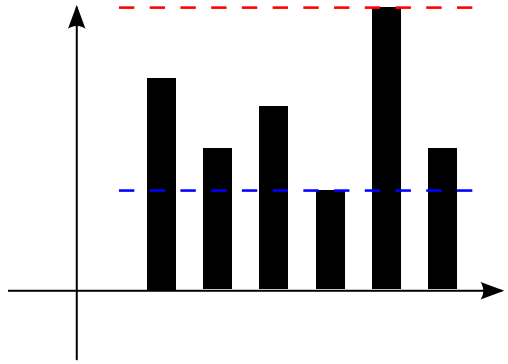
Køretid for de forskellige input af størrelse $n$

# Worst case ressourceforbrug



Worst case giver garanti. Ofte repræsentativ for average case (men nogen gange betydeligt mere pessimistisk).

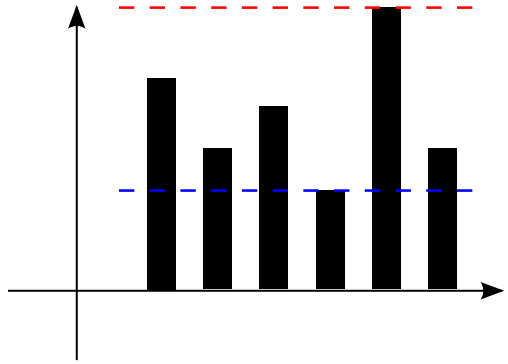
# Worst case ressourceforbrug



Worst case giver garanti. Ofte repræsentativ for average case (men nogen gange betydeligt mere pessimistisk).

Average case: Hvilken fordeling? Er den realistisk? Ofte svær analyse at gennemføre (matematisk svær).

# Worst case ressourceforbrug

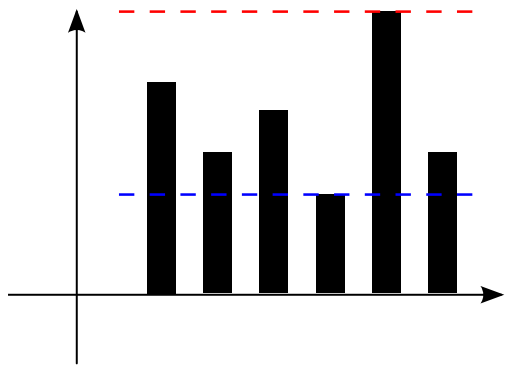


Worst case giver garanti. Ofte repræsentativ for average case (men nogen gange betydeligt mere pessimistisk).

Average case: Hvilken fordeling? Er den realistisk? Ofte svær analyse at gennemføre (matematisk svær).

Best case: Giver ofte ikke så megen relevant information.

# Worst case ressourceforbrug



Worst case giver garanti. Ofte repræsentativ for average case (men nogen gange betydeligt mere pessimistisk).

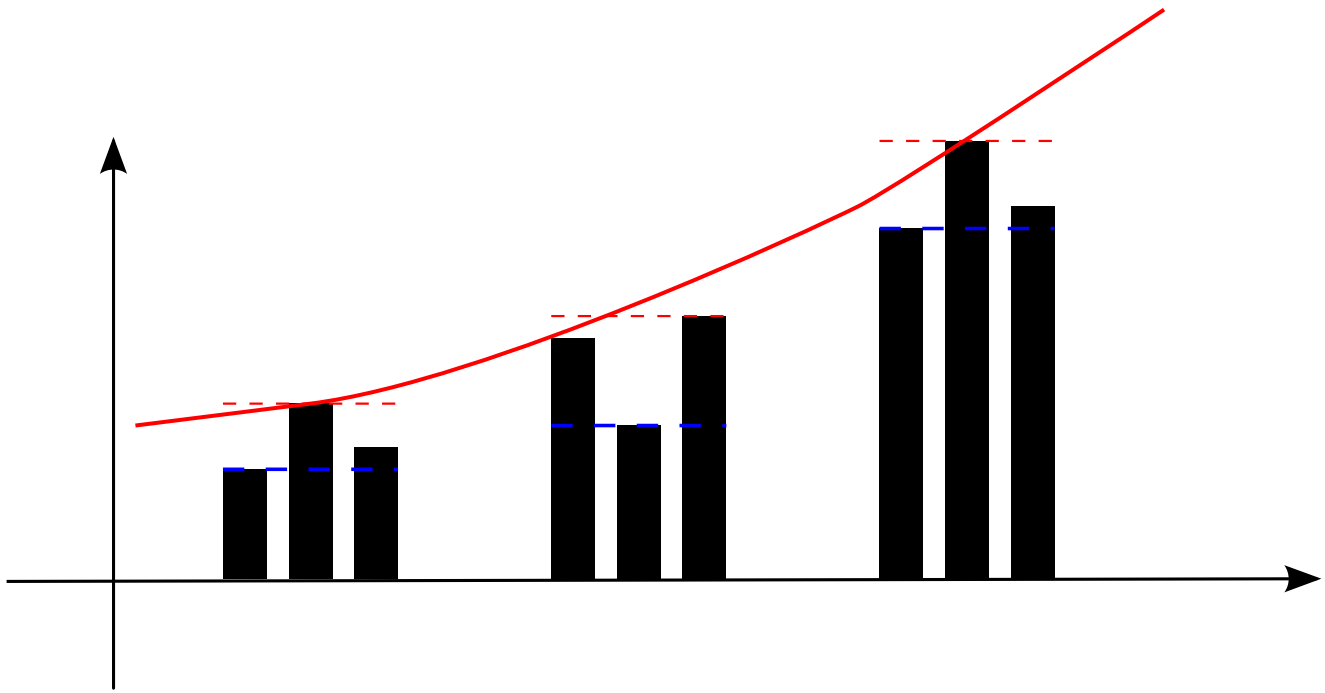
Average case: Hvilken fordeling? Er den realistisk? Ofte svær analyse at gennemføre (matematisk svær).

Best case: Giver ofte ikke så megen relevant information.

Næsten alle analyser i dette kursus er worst case.

# Forskellige inputstørrelser

Worstcase køretid er normalt en voksende funktion af inputstørrelsen $n$:



Køretid for de forskellige input af stigende størrelse $n$

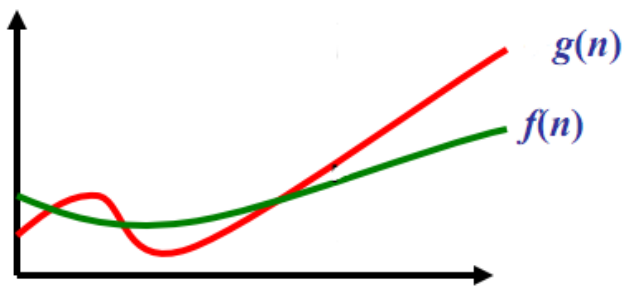
# Voksehastighed

Forbruget skal derfor ses som en funktion $f(n)$ af inputstørrelsen $n$.

# Voksehastighed

Forbruget skal derfor ses som en funktion $f(n)$ af inputstørrelsen $n$.

Vi har derfor brug for at sammenligne funktioner. Det relevante mål er voksehastighed - en hurtigere voksende funktion vil altid overhale en langsomt voksende funktion når $n$ bliver stor nok. Og for små $n$ er (næsten) alle algoritmer hurtige.



# Voksehastighed

Eksempler (stigende voksehastighed):

$$1, \quad \log n, \quad \sqrt{n}, \quad n, \quad n \log n,$$

$$n\sqrt{n}, \quad n^2, \quad n^3, \quad n^{10}, \quad 2^n$$

# Voksehastighed

Eksempler (stigende voksehastighed):

$$1, \quad \log n, \quad \sqrt{n}, \quad n, \quad n \log n,$$

$$n\sqrt{n}, \quad n^2, \quad n^3, \quad n^{10}, \quad 2^n$$

Næste gang: mere præcis definition af asymptotisk voksehastighed og sammenligninger heraf.

# Konkret eksempel på algoritmeanalyse

Ombytningspuslespil...