Invarianter

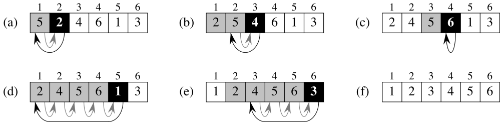
Invarianter

Invariant: Et forhold, som vedligeholdes af algoritmen gennem (dele af) dens udførelse. Udgør ofte kernen af ideen bag algoritmen.

Invarianter

Invariant: Et forhold, som vedligeholdes af algoritmen gennem (dele af) dens udførelse. Udgør ofte kernen af ideen bag algoritmen.

Eksempel: Insertionsort:

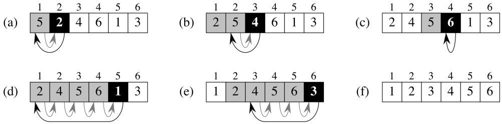


Invariant: $\boxed{\text{Alt til venstre for det sorte felt er sorteret.}}$

Invarianter

Invariant: Et forhold, som vedligeholdes af algoritmen gennem (dele af) dens udførelse. Udgør ofte kernen af ideen bag algoritmen.

Eksempel: Insertionsort:



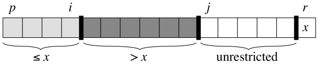
Invariant: Alt til venstre for det sorte felt er sorteret.

Når løkken stopper: hele array'et er til venstre for det sorte felt.

Af invarianten følger så: hele array'et er sorteret. Dvs. algoritmen er korrekt.

Invarianter

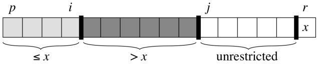
Eksempel: Partition fra Quicksort:



Invariant: $\boxed{\text{Lysegrå del} \leq x < \text{mørkegrå del.}}$

Invarianter

Eksempel: Partition fra Quicksort:



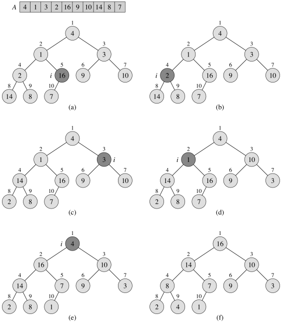
Invariant: $\boxed{\text{Lysegrå del} \leq x < \text{mørkegrå del.}}$

Når løkken stopper: Kun x er hvid, resten enten lysegrå eller mørkegrå.

Af invarianten følger så: array'et er delt i tre dele: "$\leq x$", "$> x$" og x selv. Dvs. algoritmen er korrekt.

Invarianter

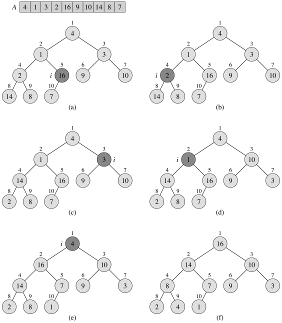
Eksempel: Build-Heap:



Invariant: Undertræer, hvis rod har indeks større end den mørke knude, overholder heaporder.

Invarianter

Eksempel: Build-Heap:



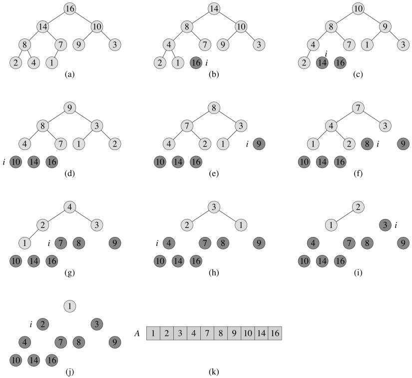
Invariant: Undertræer, hvis rod har indeks større end den mørke knude, overholder heaporder.

Når løkken stopper: roden af hele træet har indeks større end den mørke knude.

Af invarianten følger så: Hele træet overholder heaporder. Dvs. algoritmen er korrekt.

Invarianter

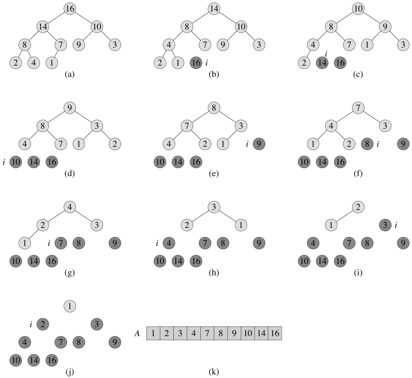
Eksempel: Heapsort (og enhver Selectionsort-baseret sortering):



Invariant: $\boxed{\text{Det mørke er sorteret, og alt i det lyse er} \leq \text{det mørke.}}$

Invarianter

Eksempel: Heapsort (og enhver Selectionsort-baseret sortering):



Invariant: $\boxed{\text{Det mørke er sorteret, og alt i det lyse er } \leq \text{ det mørke.}}$

Når løkken stopper: hele array'et er mørkt.

Af invarianten følger så: hele array'et er sorteret. Dvs. algoritmen er korrekt.

Invarianter

Eksempel: søgning i binære søgetræer.

Invariant: $\boxed{\text{Hvis søgte element } k \text{ findes, er det i det undertræ, vi er kommet til.}}$

Invarianter

Eksempel: søgning i binære søgetræer.

Invariant: $\boxed{\text{Hvis søgte element } k \text{ findes, er det i det undertræ, vi er kommet til.}}$

Algoritmen må stoppe fordi vi kigger på mindre og mindre undertræer. Når algoritmen stopper: enten er k fundet eller vi er endt i et tomt undertræ.

I det sidste tilfælde følger så af invarianten: k findes ikke i træet. Dvs. algoritmen er korrekt (i begge tilfælde).

Invarianter

Invariant under rebalancering efter indsættelse i et rød-sort træ:

> Der kan være to røde knuder i træk på en rod-blad sti højst ét sted i træet, men bortset herfra er de rød-sorte krav overholdt. Efter k iterationer er der k færre sorte mellem problemet og roden end i starten.

Invariant under rebalancering efter sletning i et rød-sort træ:

> Der kan være én sværtet knude et sted i træet, og hvis sværtningen tælles med, er de rød-sorte krav overholdt. Efter k iterationer er der k færre sorte mellem problemet og roden end i starten.

Invarianten viser her flere ting:

- Samme case analyse virker hver gang (dækker altid alle muligheder, så algoritmen kan ikke gå i stå sålænge problemet ikke er løst).
- Algoritmen må stoppe, enten ved at problemet er forsvundet, eller at det har nået roden (hvor det let løses).

Dvs. invarianten viser, at algoritmen er korrekt.

Invarianter, mere formelt

Invariant for algoritme:

- Et udsagn om indholdet af hukommelsen (variable, arrays,. . .) som er sandt efter alle skridt.
- Ved algoritmens afslutning kan korrekthed udledes af udsagnet (samt de omstændigheder som fik algoritmen til at stoppe).

Induktion

At en invariant gælder efter alle skridt vises ved hjælp af induktion:

1) Invariant overholdt i starten 2) Invariant overholdt før et skridt $\Rightarrow$ overholdt efter	$\Rightarrow$	Invariant altid overholdt

(hvor "skridt" ofte er en iteration af en løkke). Dvs: Vis 1) og 2).

Induktion

At en invariant gælder efter alle skridt vises ved hjælp af induktion:

$\boxed{\begin{array}{l}\text{1) Invariant overholdt i starten}\\ \text{2) Invariant overholdt før et skridt} \Rightarrow \\ \text{overholdt efter}\end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Invariant altid overholdt}}$

(hvor "skridt" ofte er en iteration af en løkke). Dvs: Vis 1) og 2).

Induktion $\sim$ "Dominoprincippet":

$\boxed{\begin{array}{l}\text{1) Brik 1 falder}\\ \text{2) Brik } k \text{ falder} \Rightarrow \text{brik } k+1 \text{ falder}\end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Alle brikker falder}}$

Brug af invarianter

Invarianter kan bruges på to forskellige detalje-niveauer (med en glidende overgang imellem dem):

1. Som værktøj til at udvikle algoritme-ideer: Med den rette invariant fanges essensen af metoden, og algoritmen skal "blot" skrives ud fra at denne invariant skal vedligeholdes.
2. Som værktøj til at nedskrive kode (eller detaljeret pseudo-kode) og vise den konkrete kode korrekt.

I første anvendelse er blødere beskrivelser (tekst, figur) passende, jvf. eksemplerne tidligere. I anden anvendelse må man nedskrive invarianten præcist i termer af konkrete variable fra koden, samt argumentere via den konkrete kodes ændringer af disse.

Eksemplet nedenfor med at finde største element i et array illustrerer dette.

Eksempel

Find største element i array:

```
max = A[0]
i = 1
while i < A.length
  if A[i] > max
    max = A[i]
  i++
```

Invariant: "Efter den k'te iteration af while-løkken indeholder `max` den største værdi af $A[0..(i-1)]$".

Vises ved induktion på k.

Eksempel

Find største element i array:

```
max = A[0]
i = 1
while i < A.length
  if A[i] > max
    max = A[i]
  i++
```

Invariant: "Efter den k'te iteration af while-løkken indeholder max den største værdi af $A[0..(i-1)]$".

Vises ved induktion på k.