Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

1. februar 2021
RF

Opgaver Uge 5

DM507/DS814/T510040101

I DM507/DS814, samt den del af T510040101 som handler om algoritmer og datastrukturer (Rolfs del), er opgaverne til øvelsestimerne (også kaldet eksaminatorier eller e-timer) delt i to grupper:

A. En første gruppe opgaver, som man løser *i øvelsestimerne* i grupper (under Zoom: i breakout rooms), med instruktoren til rådighed for spørgsmål undervejs og med fælles opsamling til sidst. Disse opgaver skal altså *ikke* løses på forhånd. Man skal blot have læst på stoffet fra forelæsningen.

B. En anden gruppe opgaver med samme type stof. Disse løber man kort igennem til sidst i øvelsestimen, men opgaverne skal løses *hjemme* (gerne sammen med sin studiegruppe) inden de *næste* øvelsestimer. Disse opgaver er der så kort opsamling på i starten af denne næste øvelsestime.

NB: For T510040101 vil opgavertimerne om mandagen i diskret matematik (Lenes del) have den mere traditionelle form, hvor det antages, at man både har læst på stoffet og har forsøgt at løse opgaverne *inden* disse øvelsestimer. Dette fordi der kun er 45 minutter til rådighed til disse øvelsestimer.

A: Løses i løbet af øvelsestimerne i uge 5

1. Cormen et al. problem 1.1 (side 14). Erstat dog “microseconds” med “nanoseconds” (dvs. 10^{-9} sekunder), da dette ca. er hvad en CPU-cyklus tager på en moderne processor. Du skal kun udfylde søjlerne

second, *hour*, *year* og kun rækkerne med n, $n \log n$, n^2, n^3 og 2^n. Start med n^2. For nogle af indgangene kan man finde svaret ved matematisk udregning, for andre må man prøve sig frem ved at indsætte forskellige værdier af n.

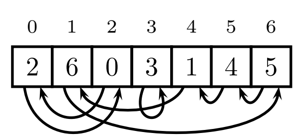
2. Brodals noter om puslespil, opgave 1.

3. Brodals noter om puslespil, opgave 2. Her betyder "optimal følge af ombytninger" et antal ombytninger som angivet af sætning 1 i noterne. Opgaven viser, at andre algoritmer end "grådige algoritmer" (algoritmer som altid bringer mindst ét element på plads) kan være optimale for dette puslespilsproblem.

4. Lav et Java- eller Python-program, som genererer en tilfældig permutation af heltallene fra 0 til $n-1$ (for et n som er en input parameter). I Java kan man bruge typen `ArrayList` samt metoden `shuffle` fra `Collections` utility klassen. I Python kan man bruge lister samt funktionen `shuffle` fra modulet `random`. Udskriv tallene i din permutation.

5. Hvis et array/en liste indeholder en permutation af tallene 0 til $n-1$ kan man definere kredse på samme måde som for puslespillet fra første forelæsning: et tal x, som står på plads y i arrayet, giver en pil fra plads y til plads x (dvs. hvis tallet 1 står på plads 4 i arrayet, er der en pil fra plads 4 til plads 1), og en samling pile, der hænger sammen i en cyklisk kæde, kaldes en kreds.

   Her er et eksempel, hvor der i alt er tre kredse i permutationen (check at du finde dem):

   Lav en algoritme, som tæller antal kredse i en permutation.

   Hvad er køretiden for din algoritme som funktion af n?

   Implementer din algoritme i Java eller Python.

B: Løses hjemme inden øvelsestimerne i uge 6

1. Fortsæt med Cormen et al. problem 1.1 (side 14), stadig med "microseconds" erstattet af "nanoseconds" (dvs. 10^{-9} sekunder). Du skal stadig kun udfylde søjlerne *second*, *hour*, *year*, men udfyld nu resten af rækkerne, dvs. $n!$, $\sqrt{n}$ og $\log n$. Start med n^2. For nogle af indgangene kan man finde svaret ved matematisk udregning, for andre må man prøve sig frem ved at indsætte forskellige værdier af n.

2. I øvelsestimen lavede du et programm, som kunne generere en tilfældig permutation, og et program, som kunne tælle antal kredse i en permutation.

   Brug disse programmer til at generere en masse tilfældige permutationer af længde 16 og tæl for hver af dem antallet af kredse i dem.

   Brug data fra disse eksperimenter til at give et bud på sandsynligheden for, at der i en tilfældig permutation med $n = 16$ er k kredse, for $k = 1, 2, \ldots, 16$. Dvs. lav din egen version af figur 3 i noterne, men med n lig 16 og ikke 64.

   Find også det gennemsnitlige antal kredse i dine eksperimenter. Passer dit tal med formlen på side 4 i noterne, dvs. er det tæt på $H_{16} = \sum_{i=1}^{16} 1/i = 1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/16$?