Sortering i lineær tid

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænse for *alle* sorteringsalgoritmer. Kræver en præcis definition af sorteringsalgoritme.

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

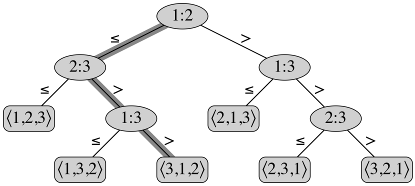
Nedre grænse for *alle* sorteringsalgoritmer. Kræver en præcis definition af sorteringsalgoritme.

Sammenligningbaseret: elementer kan sammenlignes med andre elementer, men ikke deltage i andre operationer.

- Grundlæggende handling: sammenligning af to elementer i input.
- Grundlæggende svar: opstilling som skal laves for at få sorteret orden.
- ID for elementer: deres oprindelige position (index) i input.

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Præcis model som definerer begrebet "sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer":

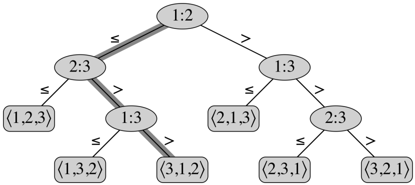


Labels for indre knuder: array-indeks for to input elementer der sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling der skal laves for at få sorteret orden (angivet med array-indekser for input elementer).

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Præcis model som definerer begrebet “sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer”:



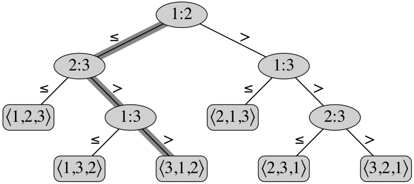
Labels for indre knuder: array-indeks for to input elementer der sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling der skal laves for at få sorteret orden (angivet med array-indekser for input elementer).

Worst-case køretid: længste rod-blad sti $=$ træets højde.

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Præcis model som definerer begrebet “sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer”:



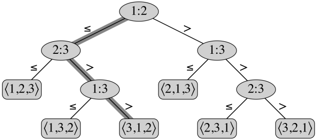
Labels for indre knuder: array-indeks for to input elementer der sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling der skal laves for at få sorteret orden (angivet med array-indekser for input elementer).

Worst-case køretid: længste rod-blad sti = træets højde.

Bemærk: Insertionsort, selectionsort, mergesort, quicksort, heapsort kan alle beskrives sådant (annotér elementer med deres index i input).

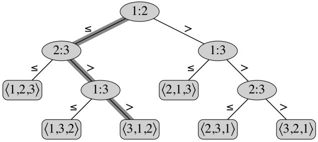
Sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Sammenligningsbaseret sortering

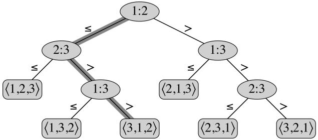


For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

Sammenligningsbaseret sortering



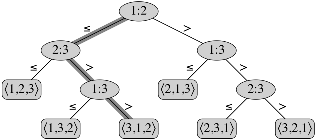
For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

Sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

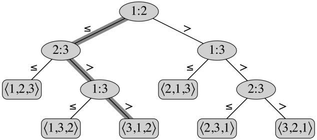
Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

Sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

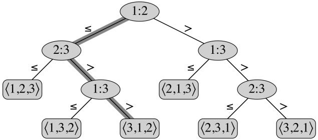
Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

$$= \log(1) + \log(2) + \ldots \log(n/2) \cdots + \log(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(\log(n) - 1)$$

Sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

$$= \log(1) + \log(2) + \ldots \log(n/2) \cdots + \log(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(\log(n) - 1)$$

$$h = \Omega(n \log n)$$

Counting sort

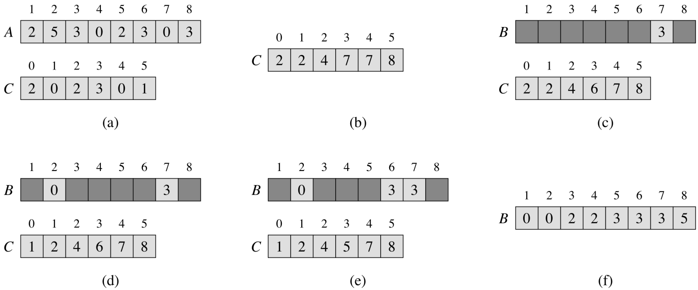
Elementer heltal: elementer kan bruges som array-indekser ($\neq$ at bruge sammenligninger på elementer).

Counting sort: Sorterer n heltal af størrelse mellem 0 og k (inkl.).

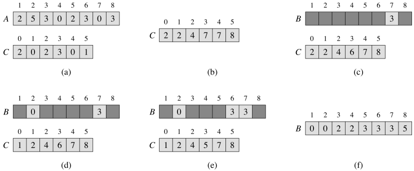
Inputarray: A (længde n)

Outputarray: B (længde n)

Array af tællere for hver mulig elementværdi: C (længde $k + 1$)



Counting sort



Counting-Sort(A,B,k)
  for $i = 0$ **to** k
    $C[i] = 0$
  for $j = 1$ **to** $A.length$
    $C[A[j]] + +$
  for $i = 1$ **to** k
    $C[i] = C[i] + C[i-1]$
  for $j = A.length$ **downto** 1
    $B[C[A[j]]] = A[j]$
    $C[A[j]] - -$

Tid: $O(n + k)$

Bemærk: stabil (da sidste løkke løber baglæns gennem både A og B), dvs at elementer med ens værdier beholder deres indbyrdes plads.

Radix sort

Radix sort: Sorterer n heltal alle med d cifre i base (radix) k.

(dvs. cifrene er heltal i $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$)

På figuren nedenfor er der 7 heltal med 3 cifre i base 10.

RADIX-SORT(A,d)
for $i = 1$ **to** d
use a stable sort to sort A on digit i from right

329	720	720	329
457	355	329	355
657	436	436	436
839	457	839	457
436	657	355	657
720	329	457	720
355	839	657	839

Tid: $O(d(n+k))$ hvis der bruges Counting Sort i **for**-løkken.

Korrekthed:

Efter i'te iteration af **for**-løkken er A sorteret hvis man kun kigger på de i cifre mest til højre.

Radix sort

Eksempel: heltal i 10-talsystemet

$\boxed{486\ 239\ 123\ 989}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 10^{12})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^{12} = 1.000.000.000.000$

Radix sort

Eksempel: heltal i 10-talsystemet

$\boxed{486\ 239\ 123\ 989}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 10^{12})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^{12} = 1.000.000.000.000$

Se som 2-cifrede tal i base 10^6 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{486\ 239}\ \boxed{123\ 989}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 10^6))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^6 = 1.000.000$

Radix sort

Eksempel: heltal i 10-talsystemet

$\boxed{486\ 239\ 123\ 989}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 10^{12})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^{12} = 1.000.000.000.000$

Se som 2-cifrede tal i base 10^6 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{486\ 239}\ \boxed{123\ 989}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 10^6))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^6 = 1.000.000$

Se som 4-cifrede tal i base 10^3 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{486}\ \boxed{239}\ \boxed{123}\ \boxed{989}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(4(n + 10^3))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^3 = 1.000$

Radix sort

Eksempel: 32-bits heltal

$\boxed{11011001\ 10011000\ 01101000\ 10110101}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Radix sort

Eksempel: 32-bits heltal

11011001 10011000 01101000 10110101

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Se som 2-cifrede tal i base 2^{16} (bemærk: sorteret orden er den samme)

11011001 10011000	01101000 10110101

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 2^{16}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{16} = 65.536$

Radix sort

Eksempel: 32-bits heltal

$\boxed{11011001\ 10011000\ 01101000\ 10110101}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Se som 2-cifrede tal i base 2^{16} (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{11011001\ 10011000}$ $\boxed{01101000\ 10110101}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 2^{16}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{16} = 65.536$

Se som 4-cifrede tal i base 2^{8} (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{11011001}$ $\boxed{10011000}$ $\boxed{01101000}$ $\boxed{10110101}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(4(n + 2^{8}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{8} = 256$