Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer (DM507)

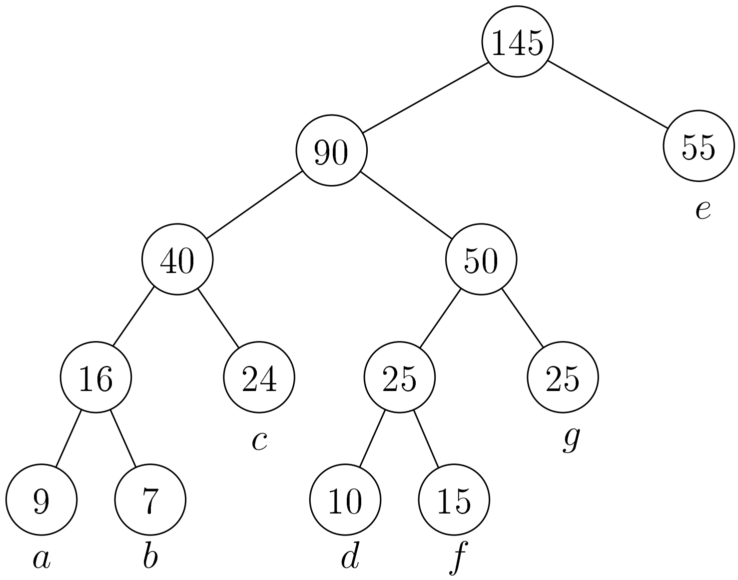
Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Tirsdag den 8. januar 2008, kl. 9–13

Løsningsforslag

Opgave 1

Spørgsmål a:



Spørgsmål b:

10	8	6	3	7	4	5	1	2	9

$\longrightarrow$

10	8	6	3	9	4	5	1	2	7

$\longrightarrow$

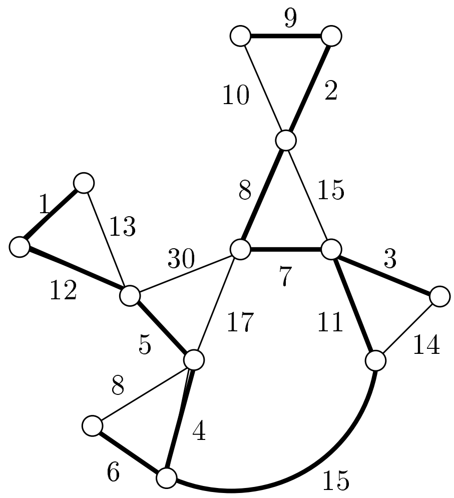
10	9	6	3	8	4	5	1	2	7

Spørgsmål c: Elementet havner på plads 6. Først prøves plads 4, derefter plads 5 og til sidst plads 6.

Opgave 2

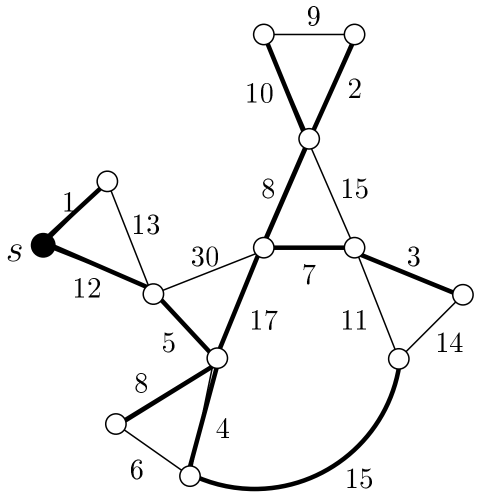
Spørgsmål a: Antag til modstrid, at der findes et MST T, som indeholder e. Hvis man fjerner e, falder T i to dele (sammenhængskomponenter). Da e tilhører en kreds C, må der være en anden kant $e' \in C$, som forbinder disse to dele. Bemærk, at e' ikke kan tilhøre T, da det ville give en kreds i T. Dermed er $T' = T + \{e'\} - \{e\}$ også et udspændende træ. Da $w(e') < w(e)$, er T' lettere end T, hvilket er i modstrid med, at T er et MST.

Spørgsmål b: Kanterne i MST er tegnet med fed:



Iflg. spm. b skal den tungeste kant i en kreds *ikke* med. Hvis vi sletter alle kanter, som er den tungeste i en kreds, indeholder grafen ikke længere nogen kreds. Dermed har vi opnået et udspændende træ.

Spørgsmål c: Kanterne i korteste-vej-træet er tegnet med fed:



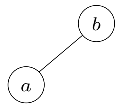
Man går den korteste vej gennem hver trekant. For knuder i kredsen bestående af fire trekanter og den “ekstra kant” skal man desuden vælge den korteste vej rundt.

Opgave 3

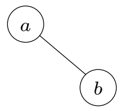
Spørgsmål a: (5,17)

Spørgsmål b: Indsættelse og sletning foretages som normalt i rød-sorte træer, med følgende tilføjelser.

Før højre-rotation om kanten (a, b), hvor b er forælder til a:
$a.y_{\max} \leftarrow b.y_{\max}$
$b.y_{\max} \leftarrow \max\{b.y, \mathrm{right}[a].y_{\max}, \mathrm{right}[b].y_{\max}\}$



Før venstre-rotation om kanten (a, b), hvor a er forælder til b:
$b.y_{\max} \leftarrow a.y_{\max}$
$a.y_{\max} \leftarrow \max\{a.y, \mathrm{left}[a].y_{\max}, \mathrm{left}[b].y_{\max}\}$



Efter indsættelse af en knude v udføres `IOpdater`(v):

<u>`IOpdater`</u>(v)
$p \leftarrow \mathrm{parent}[v]$
If $p \neq \mathrm{NIL}$
    If $v.y_{\max} > p.y_{\max}$
        $p.y_{\max} \leftarrow v.y_{\max}$
        `IOpdater`(p)

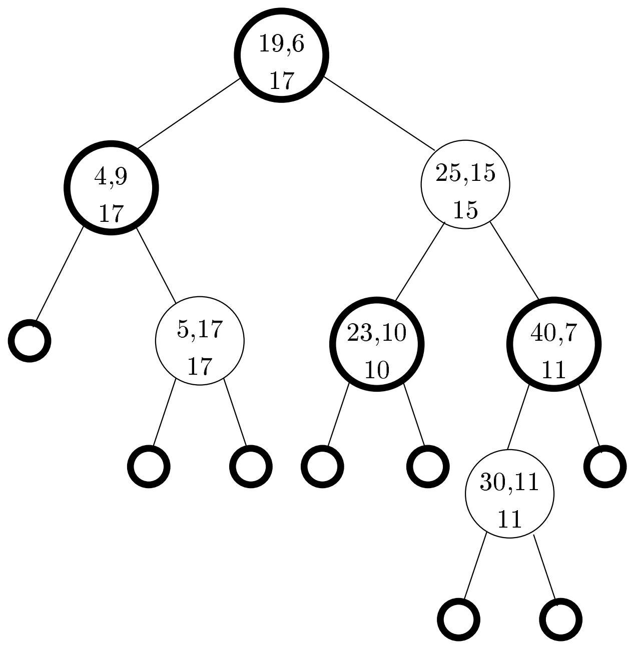
Efter sletning af en knude v:

Lad u være den strukturelt slettede knude, og lad p være u's forælder. Efter u er fjernet, udføres `SOpdater`(p). Bemærk: da den strukturelt slettede knude er efterkommer af den logisk slettede knude, behøver vi kun bekymre os om strukturelt slettet knude.

<u>`SOpdater`</u>(v)
If $v \neq \mathrm{NIL}$
    If $v.y < v.y_{\max}$
        $y \leftarrow$ `maxy`$(\mathrm{left}[v], \mathrm{right}[v])$
        If $y < v.y_{\max}$
            $v.y_{\max} \leftarrow \max\{v.y, y\}$
            `SOpdater`$(\mathrm{parent}[v])$

```
maxy(u, v)
If u ≠ NIL
    if v ≠ NIL
        if u.y_max > v.y_max
            return u.y_max
        return v.y_max
    return u.y_max
return 0
```

Spørgsmål c:



Det er ikke nødvendigt med omfarvninger eller rotationer, da den nye knudes forælder er sort.

Spørgsmål d: Søg så langt til venstre i træet som muligt. Dvs. brug flg. algoritme, hvor T er det udvidede rød-sorte træ.

MinAbove(t)
$r \leftarrow \mathrm{root}[T]$
If $r \neq \mathrm{NIL}$ and $r.u_{\max} \geq t$
    $u \leftarrow \mathtt{MA}(r, t)$
    return $(u.x, u.y)$
Else
    return NIL

MA(v, t)
$\ell \leftarrow \mathrm{left}[v]$
if $\ell \neq \mathrm{NIL}$
    if $\ell.y_{\max} \geq t$
        return $\mathtt{MA}(\ell, t)$
if $v.y \geq t$
    return v
return $\mathtt{MA}(\mathrm{right}[v], t)$

Opgave 4

Spørgsmål a: $X = \langle 2, 6, 8, 10, 14, 15, 20, 21 \rangle$ og $W = 7$.

$U(k) = \min_{1 \le i \le k-1} \left\{ U(i) + (X(k) - X(i) - W)^2 \right\}$, for $k > 1$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$X[k]$	2	6	8	10	14	15	20	21
$U(k)$	0	9	1	1	2	1	3	2

Spørgsmål b: $\langle 2, 8, 14, 21 \rangle$

Spørgsmål c:

$n \leftarrow |X|$
For $k \leftarrow 2$ to n
  $U(k) \leftarrow (X[k] - X[1] - W)^2$
  For $i \leftarrow 2$ to $k - 1$
    tmp $\leftarrow U(i) + (X(k) - X(i) - W)^2$
    If tmp $< U(k)$
      $U(k) \leftarrow$ tmp
Return $U(n)$

Det tager tid $O(k)$ at beregne $U(k)$. Dvs. køretiden er

$$O\left(1 + \sum_{k=2}^{n} k\right) = O(n^2).$$

Pladsforbruget er $O(n)$, da den plads, der bruges ud over tabellen, er konstant.