Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Datastrukturer (DM507)

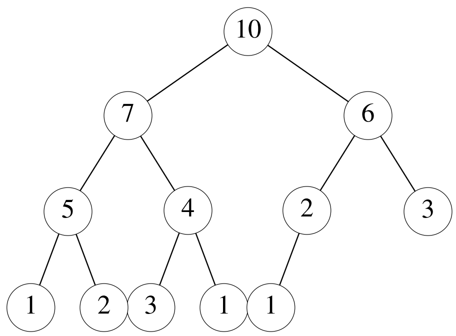
Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

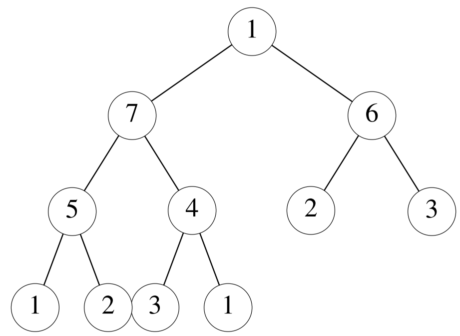
Onsdag den 10. juni 2009, kl. 9–13

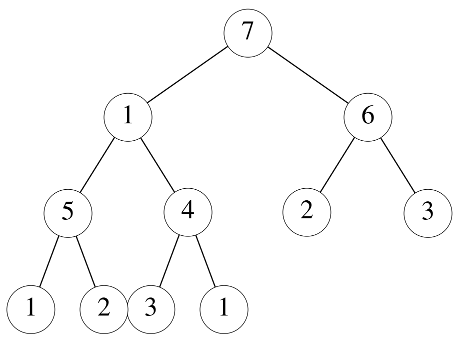
— Løsningsforslag —

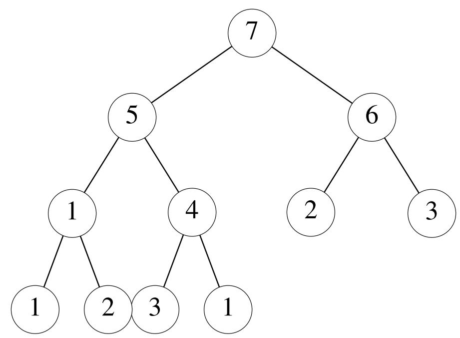
Opgave 1

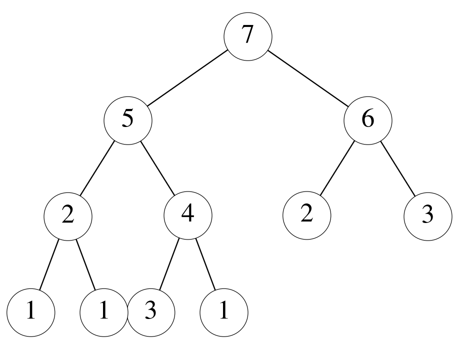
Spørgsmål a:



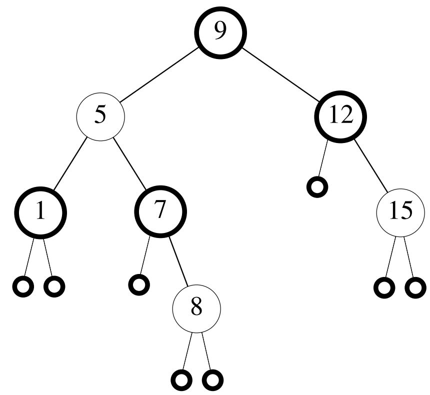








Spørgsmål b: Efterfølgeren til 2, dvs. 5, indsættes på 2's plads. Da efterfølgeren er rød, er oprydning ikke nødvendig.



Spørgsmål c: Elementet havner på plads 13:

Først prøves plads 71 mod $16 = 7$, som er optaget.

Derefter plads $(7 + \frac{1}{2}(1 + 1)) \bmod 16 = 8$, som også er optaget.

Derefter plads $(7 + \frac{1}{2}(2 + 4)) \bmod 16 = 10$, som også er optaget.

Til sidst plads $(7 + \frac{1}{2}(3 + 9)) \bmod 16 = 13$, som er ledig.

Opgave 2

Spørgsmål a: *Basistilfælde:* I starten af første gennemløb er $i = s = 0$. Dvs. $s = 0 = 0^2 = i^2$.

Induktionsskridt: Se på starten af while-løkken, og antag, at invarianten var opfyldt i starten af forrige gennemløb af while-løkken (dette er induktionsantagelsen). Lad i' og s' være værdierne af i og s i starten af forrige gennemløb. Da er $i = i' + 1$ og

$$\begin{aligned} s &= s' + 2i' + 1 \\ &= i'^2 + 2i' + 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (i' + 1)^2 \\ &= i^2 \end{aligned}$$

Spørgsmål b: Lad i' og s' være værdierne af i og s ved starten af sidste gennemløb af while-løkken. Da er $s' \leq n$, og når while-løkken slutter, er $s > n$.

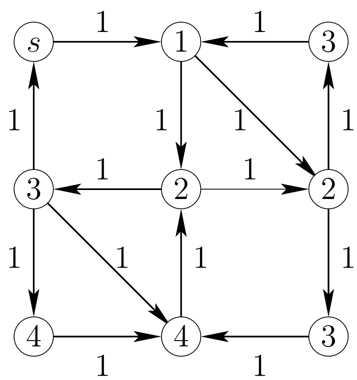
Af invarianten fås nu, at når løkken slutter, er

$$\begin{aligned} &i^2 = s > n \text{ og} \\ &(i-1)^2 = i'^2 = s' \leq n \end{aligned}$$

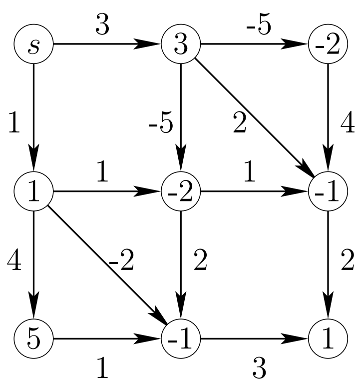
Dvs. $i - 1 \leq \sqrt{n} < i$.

Opgave 3

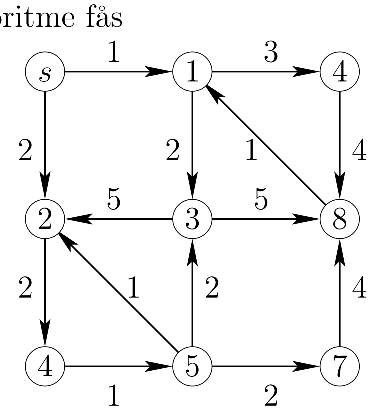
G_1: Vha. BFS fås



G_2: Vha. DAG-SHORTEST-PATHS fås



G_3: Vha. Dijkstras Algoritme fås



Opgave 4

Spørgsmål a: *Grådigt-valg-egenskab*: v dækker kanten ned til u. Hvis v ikke vælges, skal u vælges, og u dækker ikke nogen kanter, som v ikke dækker.

Optimal delstruktur: Lad T' være grafen, som er tilbage, når $e(v)$ er slettet fra E.

Hvis man finder en knude-dækning for T' og kombinerer den med v, har man en knudedækning for T, da v dækker alle kanterne i $e(v)$.

En mindst mulig knude-dækning for T' vil resultere i en mindst mulig knude-dækning for T.

Spørgsmål b: Man kan lave et dybde-først-gennemløb af træet i lineær tid.

Hver gang man backtracker fra en knude, som ikke er markeret, markerer man knuden, som man backtracker til, og inkluderer den i knude-dækningen. Dette kræver kun konstant ekstra tid per knude.

Opgave 5

Spørgsmål a:

		j			
		1	2	3	4
i	1	1	1	1	3
	2	0	1	1	1
	3	0	0	1	1
	4	0	0	0	1

Spørgsmål b: Feltet (i, j) afhænger kun af felter (i', j'), hvor $i' > i$ og $j' < j$. Man skal altså blot sørge for at udfylde tabellens felter i en rækkefølge, så alle felter (i', j') med $i' > i$ og $j' < j$ er udfyldt, når feltet (i, j) skal udfyldes.

```
LP-ITERATIV(S)
n ← length(S)
Opret n × n tabel LP
// Udfyld diagonalen:
For i ← 1 to n
    LP(i, i) ← 1
// Udfyld over diagonalen:
For i ← n − 1 downto 1
    For j ← i + 1 to n
        if x_i = x_j
            LP(i, j) ← 2 + LP(i + 1, j − 1)
        else
            LP(i, j) ← max{LP(i + 1, j), LP(i, j − 1)}
return LP(1, n)
```

Spørgsmål c: Pladsforbruget er $O(n^2)$. Da det tager konstant tid at udfylde hvert felt i tabellen, er tidsforbruget ligeledes $O(n^2)$.