Asymptotisk analyse af algoritmers køretider

Analyse af køretid

Recall: Vi ønsker at vurdere (analysere) algoritmer på forhånd inden vi bruger lang tid på at implementere dem.

De to primære spørgsmål:

- Løser algoritmen opgaven (er den korrekt)?
- Er algoritmen effektiv (hvad er køretiden)?

Vi fokuserer her på det andet spørgsmål.

Recall: I vores analyse er en algoritmes køretid antallet af basale operationer, som den udfører i RAM-modellen (for worst case input). Dette antal operationer er en voksende funktion $f(n)$ af inputstørrelsen.

Vi vil først undersøge, hvor godt teoretiske analyser i RAM-modellen ser ud til at passe med algoritmers observerede køretid på virkelige computere.

Vi vil derefter gennemgå et redskab (asymptotisk analyse) til at sammenligne $f(n)$ for forskellige algoritmer på en tilpas (u)præcis måde. Målet er at vi kan grovsortere algoritmer efter voksehastigheden af deres køretider, så vi kan undgå at implementere dem, som ikke har en chance for at være hurtigst.

Analyse af køretid: RAM-modellen vs. virkeligheden

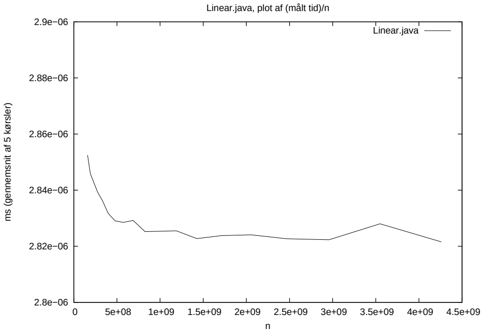
```
public class Linear {
  public static void main(String[] args) {

    long time = System.currentTimeMillis();
    long n = Long.parseLong(args[0]);
    long total = 0;
    for(long i=1; i<=n; i++){
      total = total + 1;
    }
    System.out.println(total);
    System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);
    }
}
```

Analyse

$$\boxed{\mathrm{Tid}(n) = c_1 \cdot n + c_0}$$

$$\frac{\mathrm{Tid}(n)}{n} = \frac{c_1 \cdot n + c_0}{n} = c_1 + \frac{c_0}{n}$$



Virkelighed

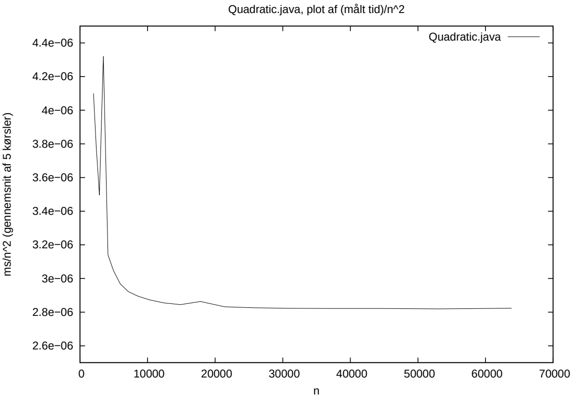
x-akse: inputstørrelse n

y-akse: (målt tid)$/n$

Analyse af tidsforbrug: RAM-modellen vs. virkeligheden

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    total = total + 1;
  }
}
```

$$\mathrm{Tid}(n)$$
$$= (c_2 \cdot n + c_1) \cdot n + c_0$$
$$= c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0$$



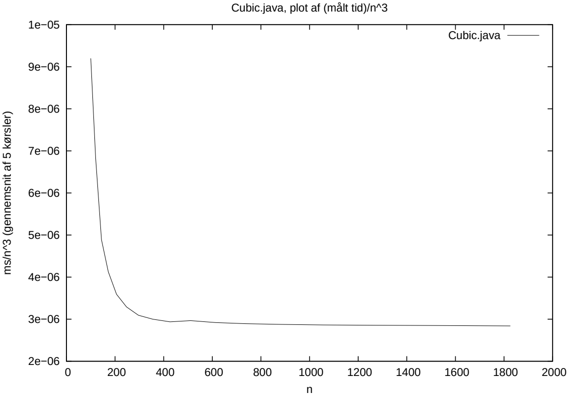
x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)$/n^2$

Analyse af tidsforbrug: RAM-modellen vs. virkeligheden

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    for(long k=1; k<=n; k++){
      total = total + 1;
    }
  }
}
```

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tid}(n)\\&= ((c_3 \cdot n + c_2) \cdot n + c_1) \cdot n + c_0\\&= c_3 \cdot n^3 + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0\end{aligned}$$



x-akse: inputstørrelse n

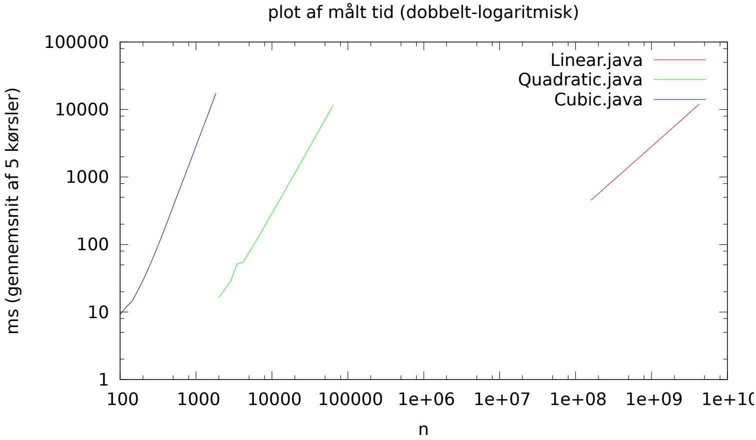
y-akse: (målt tid)$/n^3$

Analyse af tidsforbrug: RAM-modellen vs. virkeligheden

Konklusion:

Det ser ud til at analyser i RAM-modellen forudser den rigtige køretid ret godt, i hvert fald for de afprøvede eksempler.

Linear vs. kvadratisk vs. kubisk



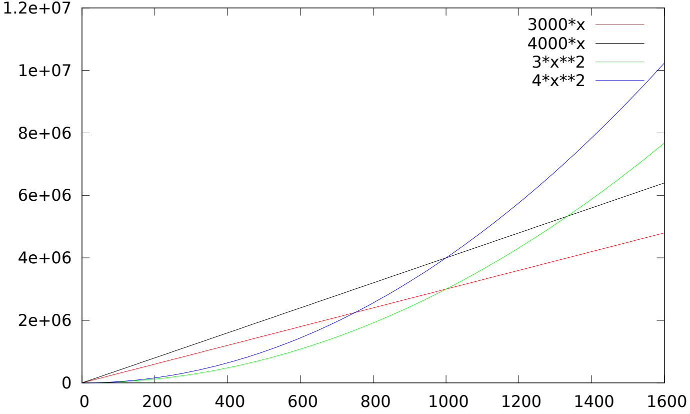
Man ser at funktionerne n, n^2, n^3 står for meget forskellige effektiviter.

I analysen optræder i virkeligheden en del konstanter (som vi typisk har svært ved at kende præcist), f.eks. $c_1 \cdot n + c_0$. Mon disse betyder noget?

Multiplikative konstanter

Multiplikative konstanter ligegyldige hvis voksehastighed er forskellig:

$$f(n) = 3000n \qquad h(n) = 3n^2$$
$$g(n) = 4000n \qquad k(n) = 4n^2$$



$$3000n < 4n^2 \Leftrightarrow 3000/4 < n \Leftrightarrow 750 < n \qquad A \cdot n < B \cdot n^2 \Leftrightarrow A/B < n$$

Voksehastighed

Vi ønsker at sammenligne funktioners essentielle voksehastighed på en måde så der ses bort fra multiplikative konstanter.

Denne sammenligning skal bruges til at lave en grovsortering af algoritmer inden vi laver implementationsarbejde.

For antag at to algoritmer A og B har voksehastigheder, som gør at køretiden for algoritme B altid (for store nok n) vil blive større end køretiden for algoritme A, uanset hvilke multiplikative konstanter, der er i udtrykkene for voksehastigheder.

Så vil der som regel ikke være nogen pointe i at implementere algoritme B. Ingen tuning af koden vil kunne få den til at vinde over algoritme A (for store n).

> Arbejdsprincip: Sammenlign først voksehastigheder af algoritmer, og implementer normalt kun den med laveste voksehastigheder. For to algoritmer med samme voksehastighed, implementer begge og mål køretider.

Asymptotisk notation

Så vi ønsker et værktøj til at sammenligne funktioners essentielle voksehastighed på en måde så der ses bort fra multiplikative konstanter.

Mere præcist: vi ønsker for voksehastighed for funktioner sammenligninger svarende til de fem klassiske ordens-relationer:

$$\leq \qquad \geq \qquad = \qquad < \qquad >$$

De vil, af historiske årsager, blive kaldt for:

$$O \qquad \Omega \qquad \Theta \qquad o \qquad \omega$$

Hvilket udtales således:

"O", "Omega", "Theta", "lille o", "lille omega"

Følgende definitioner har vist sig at fungere godt:

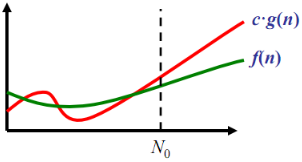
O

Definition: $f(n) = O(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \to R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$



$\boxed{\text{Mening: } f \leq g \text{ i voksehastighed}}$

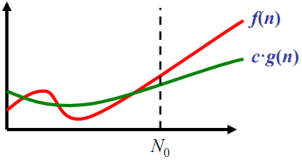
Omega

Definition: $f(n) = \Omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

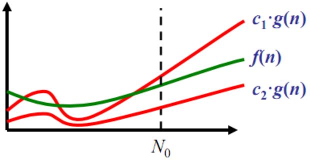


$\boxed{\text{Mening: } f \geq g \text{ i voksehastighed}}$

Theta

Definition: $f(n) = \theta(g(n))$

hvis $f(n)=O(g(n))$ og $f(n)= \Omega(g(n))$



$\boxed{\text{Mening: } f = g \text{ i voksehastighed}}$

Lille o

Definition: $f(n) = o(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$\boxed{\text{Mening: } f < g \text{ i voksehastighed}}$$

Lille omega

Definition: $f(n) = \omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Mening: $f > g$ i voksehastighed

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \;\Leftrightarrow\; g(n) = \Omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x \leq y \Leftrightarrow y \geq x\ )$$

$$f(n) = o(g(n)) \;\Leftrightarrow\; g(n) = \omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Leftrightarrow y > x\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \text{ og } f(n) = \Omega(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = \Theta(g(n))$$
$$(\text{jvf. } x \leq y \text{ og } x \geq y \Rightarrow x = y\ )$$

Asymptotisk analyse i praksis

De asymptotiske forhold mellem de fleste funktioner f og g kan afklares ved følgende sætninger:

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to k > 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = \Theta(g(n))$$

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = o(g(n))$$

Eksempler:

$$\frac{20n^2 + 17n + 312}{n^2} = \frac{20 + 17/n + 312/n^2}{1} \to \frac{20 + 0 + 0}{1} = 20 \text{ for } n \to \infty$$

$$\frac{20n^2 + 17n + 312}{n^3} = \frac{20/n + 17/n^2 + 312/n^3}{1} \to \frac{0 + 0 + 0}{1} = 0 \text{ for } n \to \infty$$

Asymptotisk analyse i praksis

Derudover er det godt at vide følgende fact fra matematik:

For alle $a > 0$ og $b > 1$ gælder

$$\frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

$\boxed{\text{Dvs. ethvert polynomium er } o() \text{ af enhver exponentialfunktion}}$

Eksempelvis giver dette at:

$$\frac{n^{100}}{2^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

hvoraf ses

$$n^{100} = o(2^n)$$

Asymptotisk analyse i praksis

Regel fra sidste slide:

$$\text{For alle } a > 0 \text{ og } b > 1 \text{ gælder } \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

For $c > 1$ og $d > 0$, sæt $N = \log_c(n)$ og $b = c^d$. Så haves

$$\frac{(\log_c n)^a}{n^d} = \frac{N^a}{(c^{\log_c(n)})^d} = \frac{N^a}{c^{d \log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^{\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^N}$$

og derfor fås følgende variant af reglen:

$$\text{For alle } a, d > 0 \text{ og } c > 1 \text{ gælder } \frac{(\log_c n)^a}{n^d} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. enhver logaritme (selv opløftet i enhver potens) er $o()$ af ethvert polynomium.

Eksempelvis giver dette at:

$$\frac{(\log n)^3}{n^{0.5}} \to 0 \text{ for } n \to \infty, \text{ hvoraf ses } (\log n)^3 = o(n^{0.5})$$

Større eksempel

Disse regler forklarer at følgende funktioner er sat i stigende voksehastighed (den ene er $o()$ af den næste):

$$1, \quad \log n, \quad \sqrt{n}, \quad n, \quad n \log n,$$

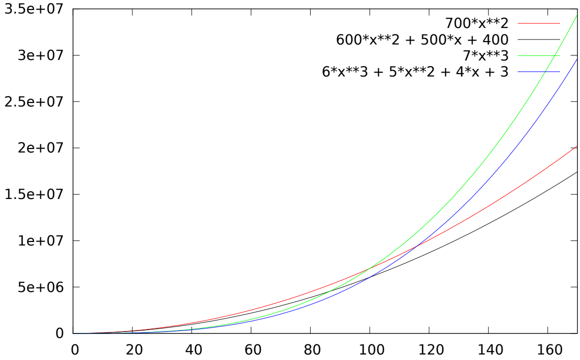
$$n\sqrt{n}, \quad n^2, \quad n^3, \quad n^{10}, \quad 2^n$$

Dominerende led

Bemærk at dominerende led (led med højeste voksehastighed) bestemmer samlet voksehastighed. Eksempel (figur):

$$f(n) = 700n^2 \qquad g(n) = 7n^3$$

$$h(n) = 600n^2 + 500n + 400 \qquad k(n) = 6n^3 + 5n^2 + 4n + 3$$



Figuren passer med beregninger:

Dominerende led

$$\frac{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3}{7n^3} = \frac{6 + 5/n + 4/n^2 + 3/n^3}{7} \to \frac{6 + 0 + 0 + 0}{7} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $6n^3 + 5n^2 + 4n + 3 = \Theta(7n^3)$

$$\frac{600n^2 + 500n + 400}{700n^2} = \frac{600 + 500/n + 400/n^2}{700} \to \frac{600 + 0 + 0}{700} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $600n^2 + 500n + 400 = \Theta(700n^2)$

$$\frac{600n^2 + 500n + 400}{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3} = \frac{600/n + 500/n^1 + 400/n^2}{6 + 5/n^1 + 4/n^2 + 3/n^3} \to \frac{0 + 0 + 0}{6 + 0 + 0 + 0} = 0 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $600n^2 + 500n + 400 = o(6n^3 + 5n^2 + 4n + 3)$