# Disjoint Sets

# Partition

En *Partition* (disjunkt opdeling) af en mængde $S$ er en samling ikke-tomme delmængder $A_i$, $i = 1, \ldots, k$ som er disjunkte og tilsammen udgør $S$:

$$A_i \neq \emptyset \text{ for alle } i$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = S$$

Eksempel:

$\{a, b, e\}$, $\{f\}$, $\{c, d, g, h\}$ er en partition af $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

# Disjoint Sets operationer

Disjunkte mængder (partition) som datastruktur? Følgende er en samling operationer, som har vist sig relevante i anvendelser (anvendelser senere i kurset):

$\textsc{Make-Set}(x)$:

Opret $\{x\}$ som en mængde.

$\textsc{Union}(x, y)$:

Slå $\{a, b, c, \ldots, x\}$ og $\{h, i, j, \ldots, y\}$ sammen til $\{a, b, c, \ldots, x, h, i, j, \ldots, y\}$.

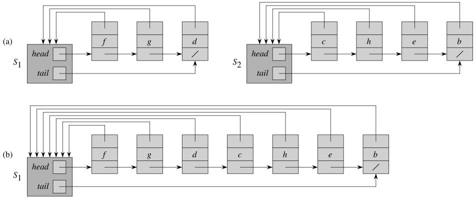
$\textsc{Find-Set}(x)$:

Returner en ID for mængden indeholdende $x$.

NB: Vi har ingen krav til ID'en. Skal blot være den samme for alle $x$ i samme mængde, således at vi kan checke om to elementer $x$ og $y$ ligger i samme mængde.

# Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister

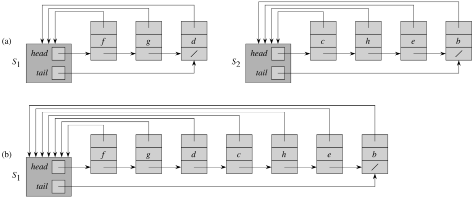
Hver mængde er en lænket liste af elementer, liste-header er ID for mængde:




- $\textsc{Find-Set}(x)$: returner pointer til header.
- $\textsc{Make-Set}(x)$: opret ny liste.
- $\textsc{Union}(x, y)$: slå lister sammen, behold én header, ændrer alle header-pointere i den anden liste.

# Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister

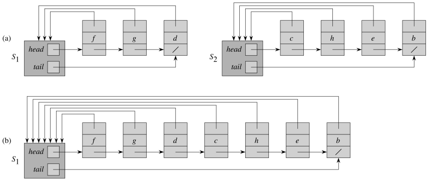
Køretid ($n$ er antal elementer, dvs. antal MAKE-SETs udført)?




- FIND-SET$(x)$: returner pointer til header: $O(1)$.
- MAKE-SET$(x)$: opret ny liste: $O(1)$.
- UNION$(x, y)$: slå lister sammen, behold én header, ændre alle header-pointere i den anden liste: $O(n)$.

Naiv analyse: $n$ MAKE-SET, op til $n - 1$ UNION, og $m$ FIND-SET koster $O(m + n^2)$.

# Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister



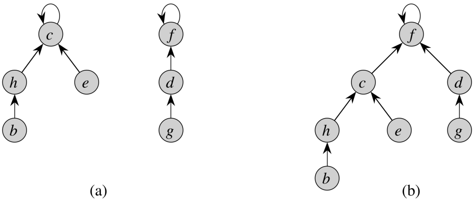

- $\text{FIND-SET}(x)$: returner pointer til header: $O(1)$.
- $\text{MAKE-SET}(x)$: opret ny liste: $O(1)$.
- $\text{UNION}(x, y)$: slå lister sammen, behold header af længste liste, ændre alle header-pointere i korteste liste: $O(n)$.

Observér at nu gælder: en knude kan kun ændre sin header-pointer $\log n$ gange, da størrelsen af dens mængde hver gang vokser mindst en faktor to ($1 \cdot 2^k \leq n \Leftrightarrow k \leq \log n$).

Så bedre analyse: $n$ $\text{MAKE-SET}$, op til $n - 1$ $\text{UNION}$, og $m$ $\text{FIND-SET}$ koster $O(m + n \log n)$.

# Datastruktur for Disjoint Sets via træer

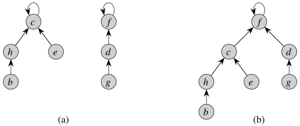
Hver mængde er et træ med elementer i knuder, rod er ID for mængde:



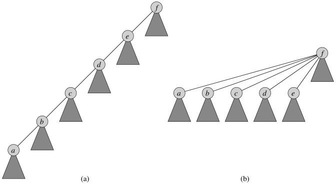
(a) (b)

- $\textsc{Find-Set}(x)$: gå til rod.
- $\textsc{Make-Set}(x)$: opret nyt træ.
- $\textsc{Union}(x, y)$: gør rod af ét træ til barn af andet træ.

# Datastruktur for Disjoint Sets via træer




(a) (b)




(a) (b)

*Union by rank* og *path compression* (se bog afsnit 21.3 eller koden nedenfor for definition) $\Rightarrow$ meget tæt på $O(m+n)$ tid. Mere præcist $O(m \cdot \alpha(n))$, hvor $\alpha(n)$ er en meget langtsomt voksende funktion (defineret i afsnit 21.4, som ikke er pensum).

Analyse: i et senere kursus på datalogistudiet.

# Datastruktur for Disjoint Sets via træer

Pseudokode (med union by rank og path compression) er simpel:

```
MAKE-SET(x)
  x.p = x
  x.rank = 0

UNION(x, y)
  LINK(FIND-SET(x), FIND-SET(y))

FIND-SET(x)
  if x ≠ x.p
      x.p = FIND-SET(x.p)
  return x.p

LINK(x, y)
  if x.rank > y.rank
      y.p = x
  else x.p = y
      // If equal ranks, choose y as parent and increment its rank.
      if x.rank == y.rank
          y.rank = y.rank + 1
```