Sortering i lineær tid

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænse for *alle* sorteringsalgoritmer. Kræver en præcis definition af sorteringsalgoritme.

Sammenligningbaseret: elementer kan sammenlignes med andre elementer, men ikke deltage i andre operationer.

- Grundlæggende handling: sammenligning af to elementer i input.
- Grundlæggende svar: opstilling som skal laves for at få sorteret orden.
- ID for elementer: deres *oprindelige* position (index) i input.

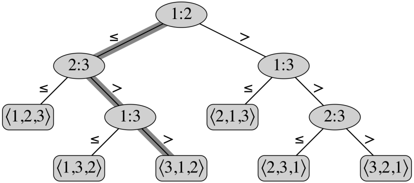
Bemærk: hvis vi starter med at annotere alle input-elementer med deres oprindelige position, kan vi i en konkret algoritme altid følge med i, hvilke to ID'er, som sammenlignes.

Annotering af input:

$$51, 27, 99, 61, 18, 37, \ldots \to (51, 1), (27, 2), (99, 3), (61, 4), (18, 5), (37, 6), \ldots$$

Decision trees

Præcis model som definerer begrebet "sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer":



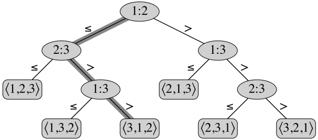
Labels for indre knuder: ID'er (dvs. oprindelige indeks i input) for to input-elementer, som sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling som skal laves for at få sorteret orden (angivet med liste af ID'er, dvs. af oprindelige indekser for input-elementer).

Worst-case køretid: længste rod-blad sti = træets højde.

Bemærk: Insertionsort, selectionsort, mergesort, quicksort, heapsort kan alle beskrives sådan.

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

$$= \log(1) + \log(2) + \ldots \log(n/2) \cdots + \log(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(\log(n) - 1)$$

$$\text{Så worst-case køretid } = \text{ træets højde } h = \Omega(n \log n)$$

Counting sort

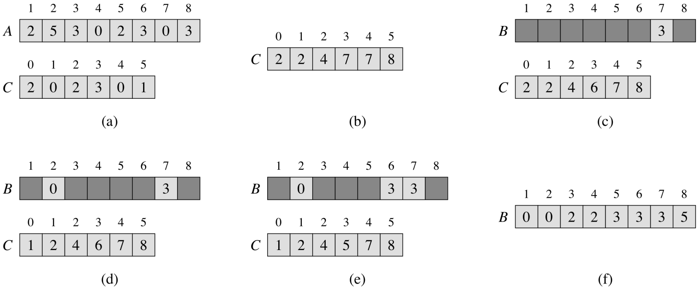
Elementer heltal: elementer kan bruges som array-indekser ($\neq$ at bruge sammenligninger på elementer).

Counting sort: Sorterer n heltal af størrelse mellem 0 og k (inkl.).

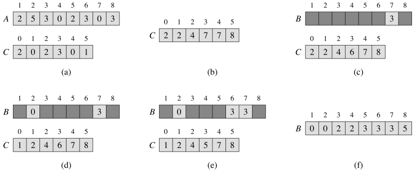
Inputarray: A (længde n)

Outputarray: B (længde n)

Array af tællere for hver mulig elementværdi: C (længde $k+1$)



Counting sort



$\textsc{Counting-Sort}(A,B,k)$
  for $i = 0$ **to** k
    $C[i] = 0$
  for $j = 1$ **to** $A.length$
    $C[A[j]]++$
  for $i = 1$ **to** k
    $C[i] = C[i] + C[i-1]$
  for $j = A.length$ **downto** 1
    $B[C[A[j]]] = A[j]$
    $C[A[j]]--$

Tid: $O(n+k)$

Bemærk: stabil (da sidste løkke løber baglæns gennem både A og B), dvs at elementer med ens værdier beholder deres indbyrdes plads.

Radix sort

Radix sort: Sorterer n heltal alle med d cifre i base (radix) k.

(dvs. cifrene er heltal i $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$)

På figuren nedenfor er der 7 heltal med 3 cifre i base 10.

```
RADIX-SORT(A,d)
  for i = 1 to d
    use a stable sort to sort A on digit i from right
```

329		720		720		329
457		355		329		355
657		436		436		436
839	→	457	→	839	→	457
436		657		355		657
720		329		457		720
355		839		657		839

Tid: $O(d(n+k))$ hvis der bruges Counting Sort i **for**-løkken.

Korrekthed:

> Efter i'te iteration af **for**-løkken er A sorteret hvis man kun kigger på de i cifre mest til højre.

Radix sort

Eksempel: heltal i 10-talsystemet med bredde 12

$\boxed{486\ 239\ 123\ 989}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 10^{12})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^{12} = 1.000.000.000.000$

Se som 2-cifrede tal i base 10^6 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{486\ 239}\ \boxed{123\ 989}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 10^6))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^6 = 1.000.000$

Se som 4-cifrede tal i base 10^3 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{486}\ \boxed{239}\ \boxed{123}\ \boxed{989}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(4(n + 10^3))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^3 = 1.000$

Radix sort

Eksempel: heltal i 2-talsystemet med bredde 32 (dvs. binære tal med 32 bits)

$\boxed{11011001\ 10011000\ 01101000\ 10110101}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Se som 2-cifrede tal i base 2^{16} (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{11011001\ 10011000}$ $\boxed{01101000\ 10110101}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 2^{16}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{16} = 65.536$

Se som 4-cifrede tal i base 2^8 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{11011001}$ $\boxed{10011000}$ $\boxed{01101000}$ $\boxed{10110101}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(4(n + 2^8))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^8 = 256$