Asymptotisk analyse af algoritmers køretider

Analyse af køretid

Recall: Vi ønsker at vurdere (analysere) algoritmer på forhånd inden vi bruger lang tid på at implementere dem.

De to primære spørgsmål:

- Løser algoritmen opgaven (er den korrekt)?
- Er algoritmen effektiv (hvad er køretiden)?

Vi fokuserer i disse slides på det andet spørgsmål.

Analyse af køretid

Recall: I vores analyse er en algoritmes køretid antallet af basale operationer, som den udfører i RAM-modellen (for worst case input). Dette antal operationer er en voksende funktion $f(n)$ af inputstørrelsen.

Analyse af køretid

Recall: I vores analyse er en algoritmes køretid antallet af basale operationer, som den udfører i RAM-modellen (for worst case input). Dette antal operationer er en voksende funktion $f(n)$ af inputstørrelsen.

Vi vil starte med at undersøge, hvor godt teoretiske analyser i RAM-modellen ser ud til at passe med algoritmers observerede køretid på virkelige computere.

Analyse af køretid

Recall: I vores analyse er en algoritmes køretid antallet af basale operationer, som den udfører i RAM-modellen (for worst case input). Dette antal operationer er en voksende funktion $f(n)$ af inputstørrelsen.

Vi vil starte med at undersøge, hvor godt teoretiske analyser i RAM-modellen ser ud til at passe med algoritmers observerede køretid på virkelige computere.

Vi vil dernæst introducere et redskab, kaldet *asymptotisk analyse*, til at sammenligne $f(n)$ for forskellige algoritmer på en tilpas (u)præcis måde.

Målet er, at vi kan grovsortere algoritmer efter voksehastigheden af deres køretider, så vi kan undgå at implementere dem, som ikke har en chance for at være hurtigst.

RAM-modellen vs. virkeligheden

```
public class Linear {
  public static void main(String[] args) {

    long time = System.currentTimeMillis();
    long n = Long.parseLong(args[0]);
    long total = 0;
    for(long i=1; i<=n; i++){
      total = total + 1;
    }
    System.out.println(total);
    System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);
    }
}
```

RAM-modellen vs. virkeligheden

```
public class Linear {
  public static void main(String[] args) {

    long time = System.currentTimeMillis();
    long n = Long.parseLong(args[0]);
    long total = 0;
    for(long i=1; i<=n; i++){
      total = total + 1;
    }
    System.out.println(total);
    System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);
    }
}
```

Analyse

$$\text{Tid}(n) = c_1 \cdot n + c_0$$

RAM-modellen vs. virkeligheden

```
public class Linear {
  public static void main(String[] args) {

    long time = System.currentTimeMillis();
    long n = Long.parseLong(args[0]);
    long total = 0;
    for(long i=1; i<=n; i++){
      total = total + 1;
    }
    System.out.println(total);
    System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);
    }
}
```

Analyse

$$\mathrm{Tid}(n) = c_1 \cdot n + c_0$$

$$\frac{\mathrm{Tid}(n)}{n} = \frac{c_1 \cdot n + c_0}{n} = c_1 + \frac{c_0}{n}$$

RAM-modellen vs. virkeligheden

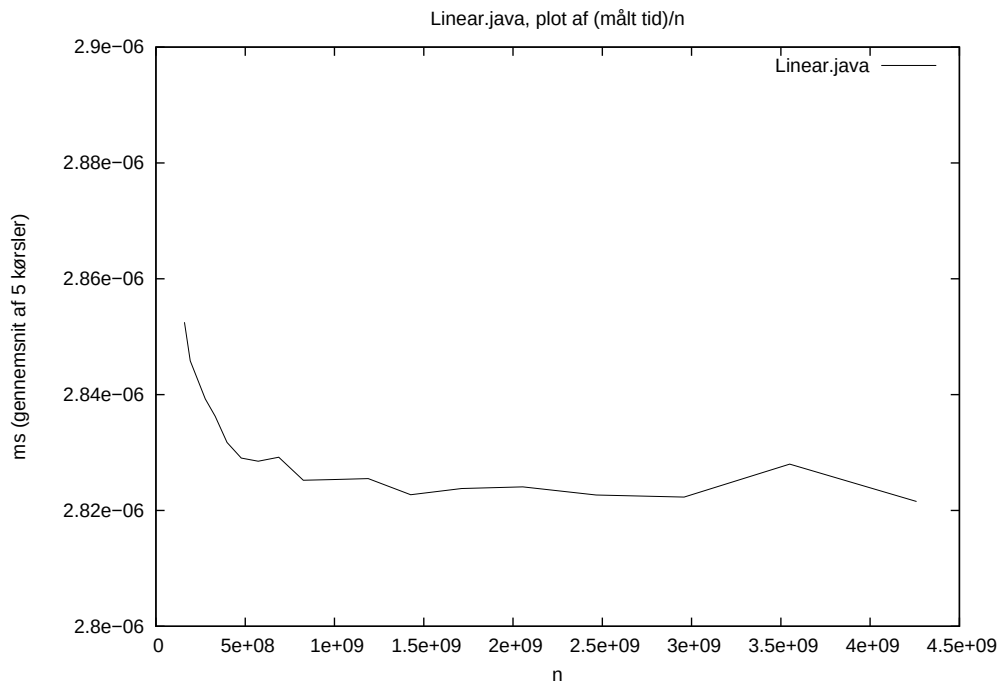
```
public class Linear {
  public static void main(String[] args) {

    long time = System.currentTimeMillis();
    long n = Long.parseLong(args[0]);
    long total = 0;
    for(long i=1; i<=n; i++){
      total = total + 1;
    }
    System.out.println(total);
    System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);
    }
}
```

Analyse

$$\text{Tid}(n) = c_1 \cdot n + c_0$$

$$\frac{\text{Tid}(n)}{n} = \frac{c_1 \cdot n + c_0}{n} = c_1 + \frac{c_0}{n}$$



Virkelighed

x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)/n

RAM-modellen vs. virkeligheden

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    total = total + 1;
  }
}
```

RAM-modellen vs. virkeligheden

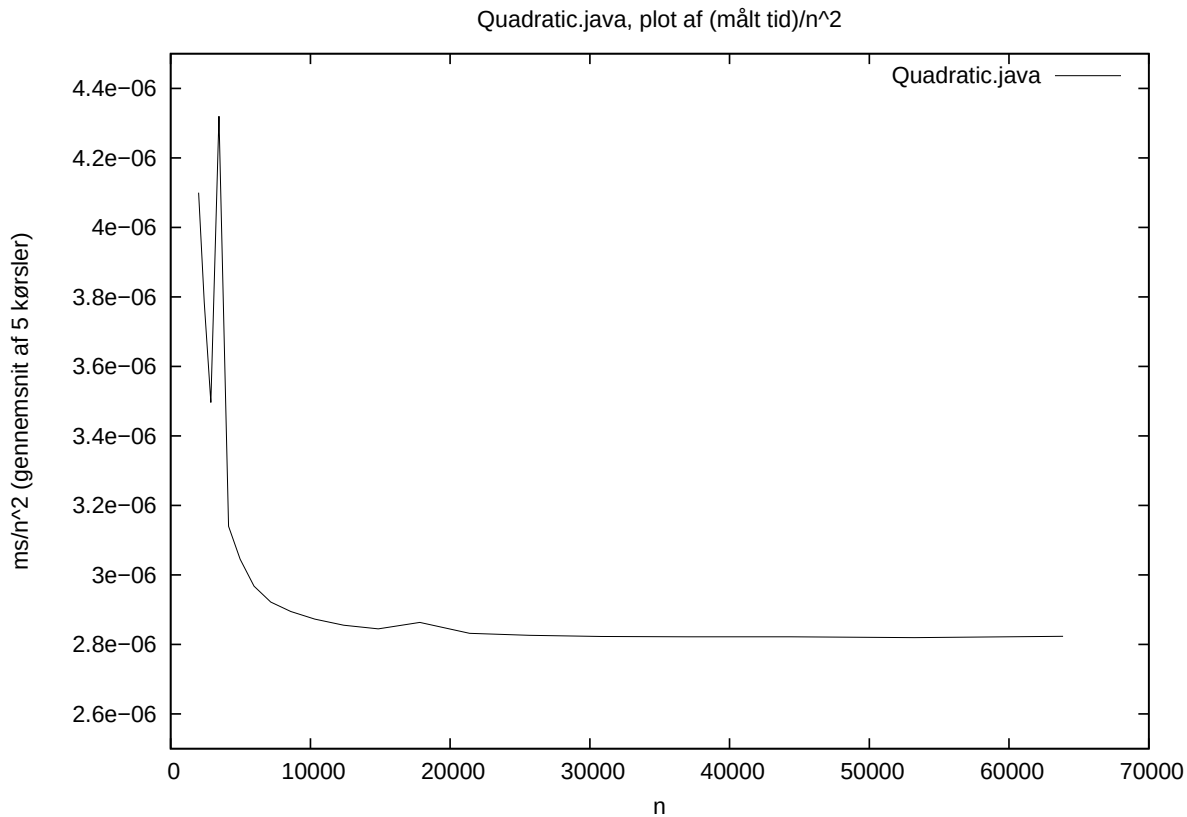
```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    total = total + 1;
  }
}
```

$$\begin{aligned}\mathrm{Tid}(n) &= (c_2 \cdot n + c_1) \cdot n + c_0 \\ &= c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0\end{aligned}$$

RAM-modellen vs. virkeligheden

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    total = total + 1;
  }
}
```

$$\begin{aligned}\text{Tid}(n) &= (c_2 \cdot n + c_1) \cdot n + c_0 \\ &= c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0\end{aligned}$$



x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)$/n^2$

RAM-modellen vs. virkeligheden

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    for(long k=1; k<=n; k++){
      total = total + 1;
    }
  }
}
```

RAM-modellen vs. virkeligheden

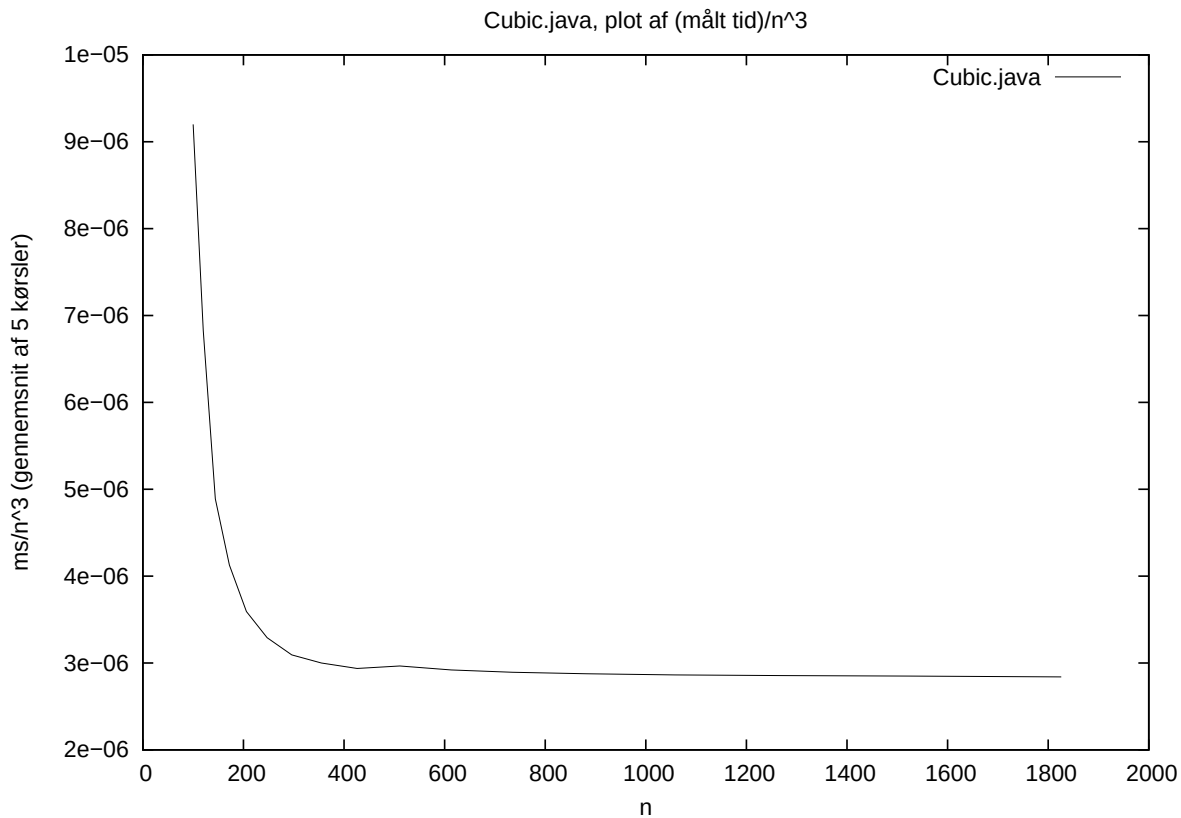
```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    for(long k=1; k<=n; k++){
      total = total + 1;
    }
  }
}
```

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tid}(n) \\ &= ((c_3 \cdot n + c_2) \cdot n + c_1) \cdot n + c_0 \\ &= c_3 \cdot n^3 + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0 \end{aligned}$$

RAM-modellen vs. virkeligheden

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    for(long k=1; k<=n; k++){
      total = total + 1;
    }
  }
}
```

$$\begin{aligned}\text{Tid}(n) &= ((c_3 \cdot n + c_2) \cdot n + c_1) \cdot n + c_0 \\ &= c_3 \cdot n^3 + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0\end{aligned}$$



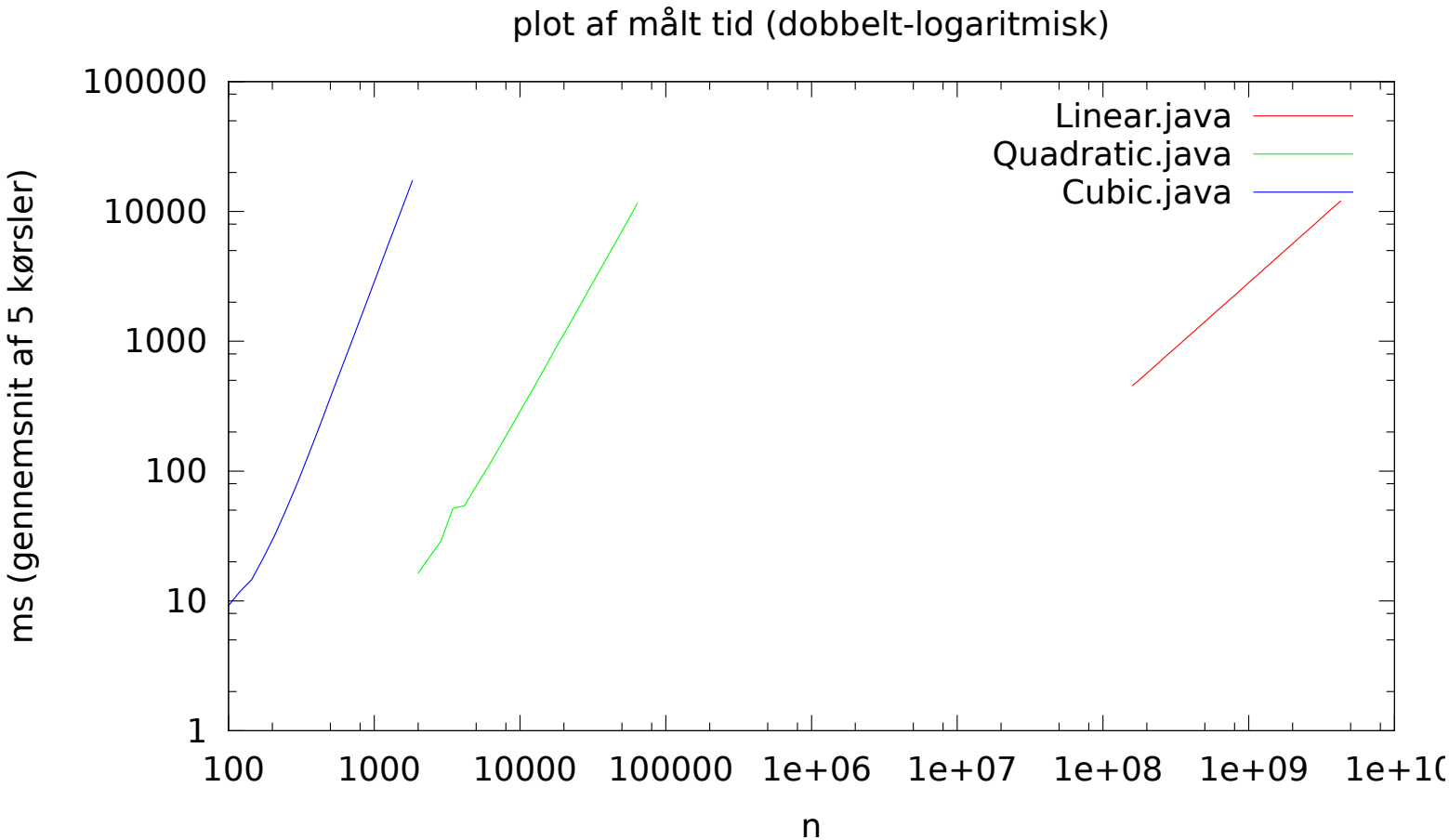
x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)$/n^3$

RAM-modellen vs. virkeligheden

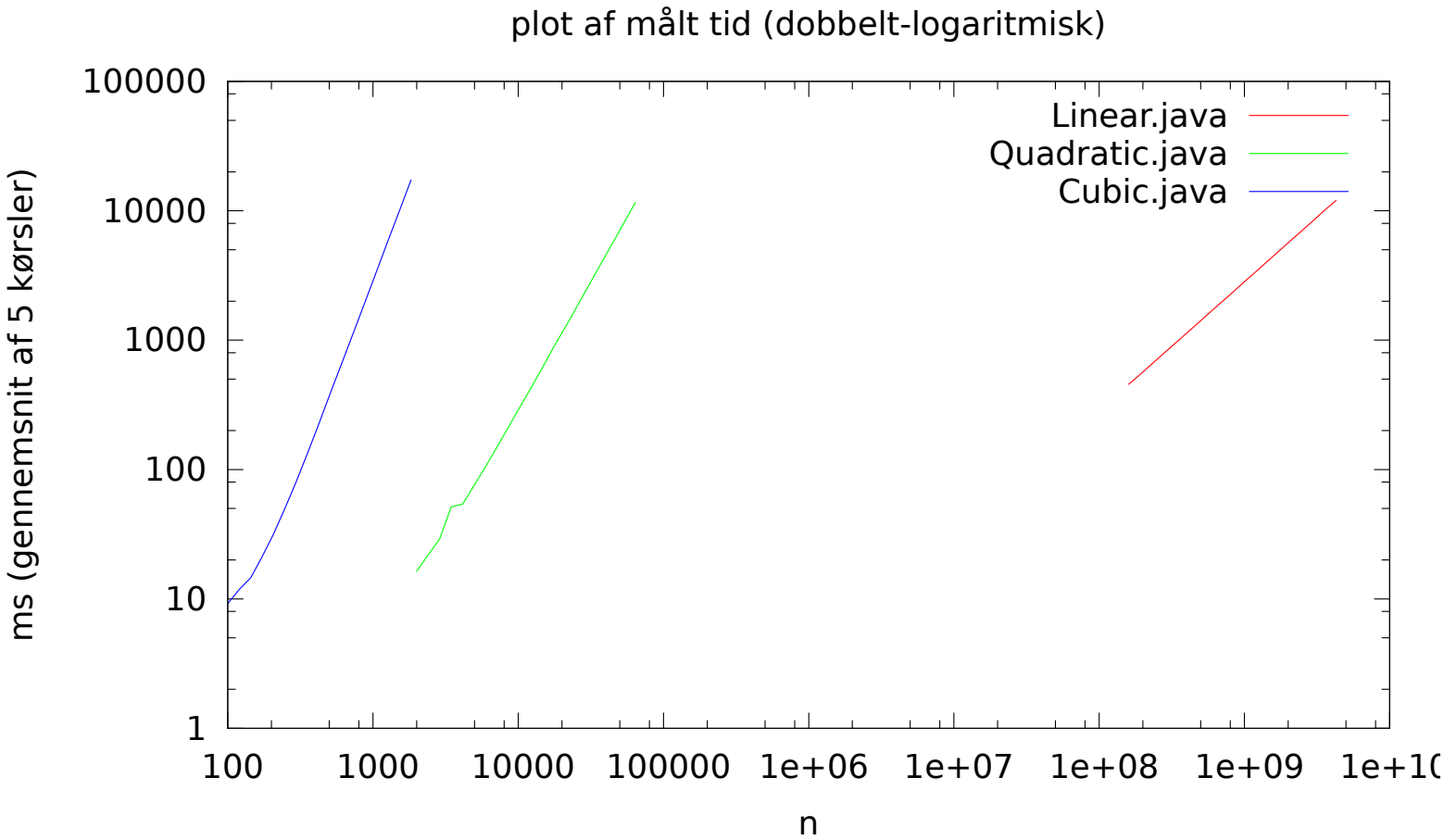
Konklusion: Det ser ud til at analyser i RAM-modellen forudser den rigtige køretid ret godt, i hvert fald for de afprøvede eksempler.

Linear vs. kvadratisk vs. kubisk



Man ser at funktionerne n, n^2 og n^3 står for meget forskellige effektiviter.

Linear vs. kvadratisk vs. kubisk



Man ser at funktionerne n, n^2 og n^3 står for meget forskellige effektiviter.

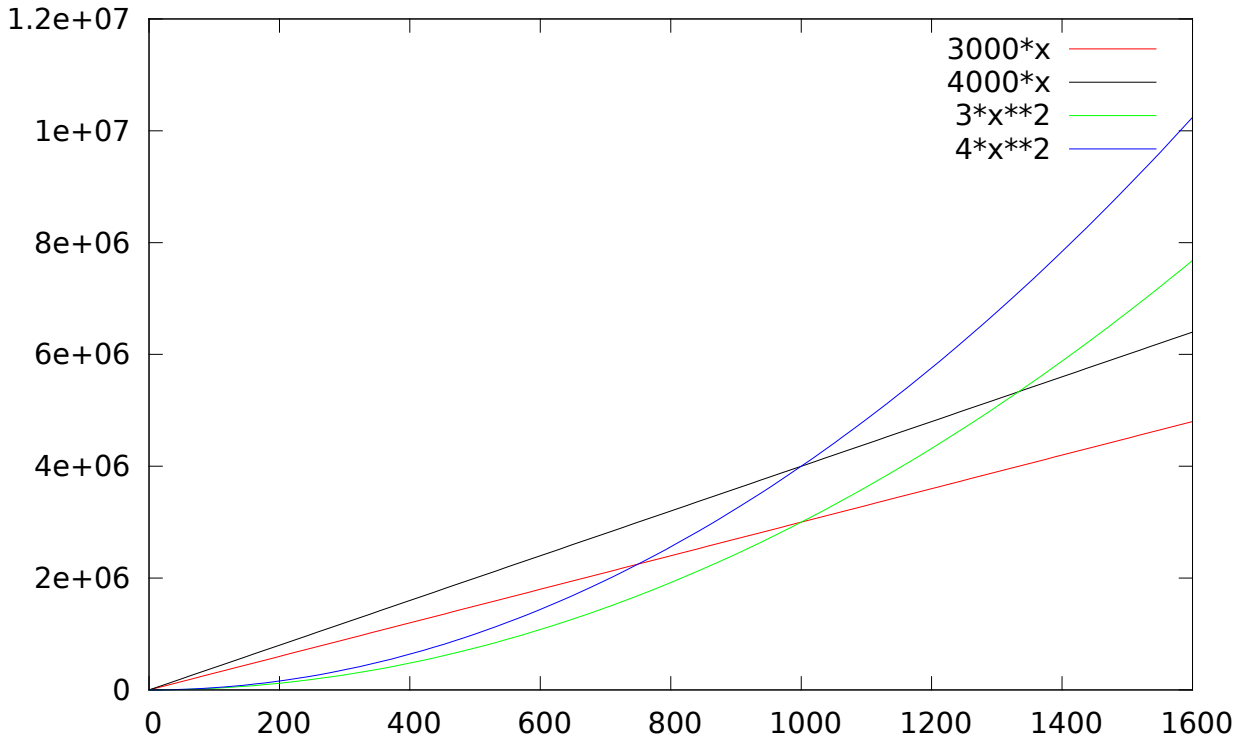
I analysen optræder i virkeligheden en del konstanter (som vi typisk har svært ved at kende præcist), f.eks. $c_1 \cdot n + c_0$. Mon disse betyder noget?

Multiplikative konstanter

Multiplikative konstanter ligegyldige hvis voksehastighed er forskellig:

$f(n) = 3000n$ $\quad$ $h(n) = 3n^2$

$g(n) = 4000n$ $\quad$ $k(n) = 4n^2$

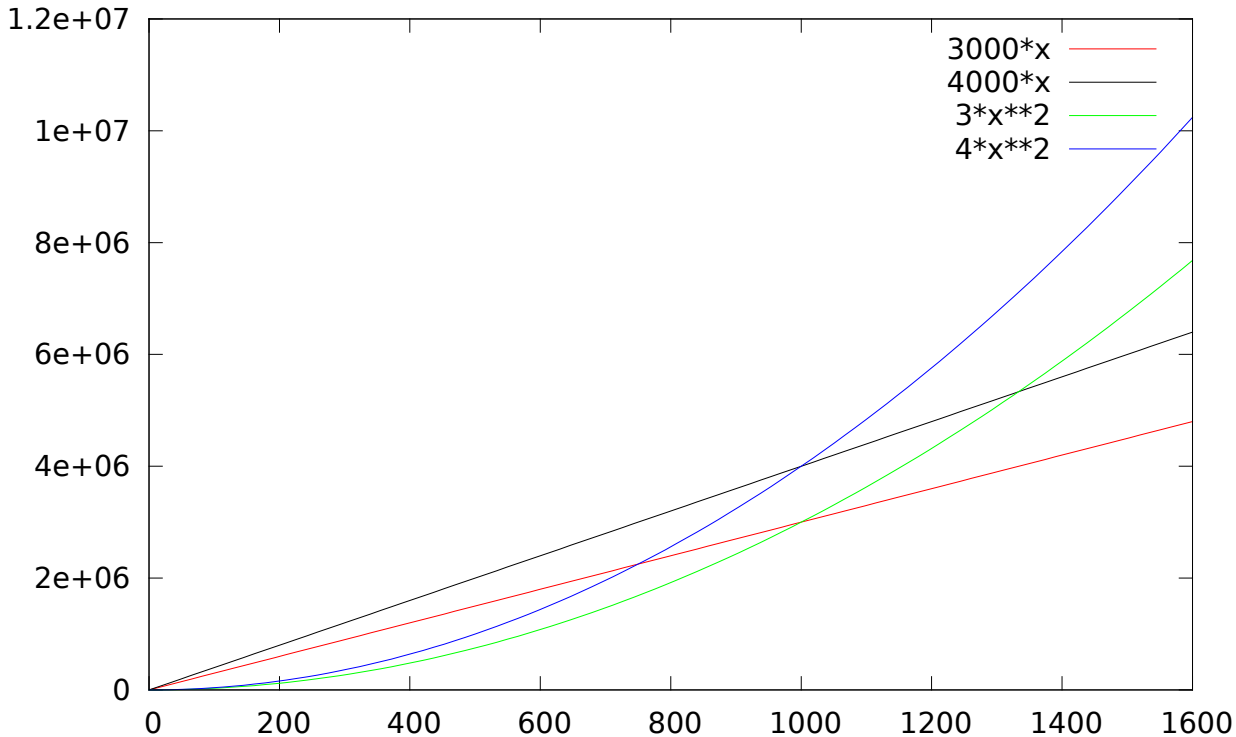


Multiplikative konstanter

Multiplikative konstanter ligegyldige hvis voksehastighed er forskellig:

$f(n) = 3000n$ $\quad$ $h(n) = 3n^2$

$g(n) = 4000n$ $\quad$ $k(n) = 4n^2$



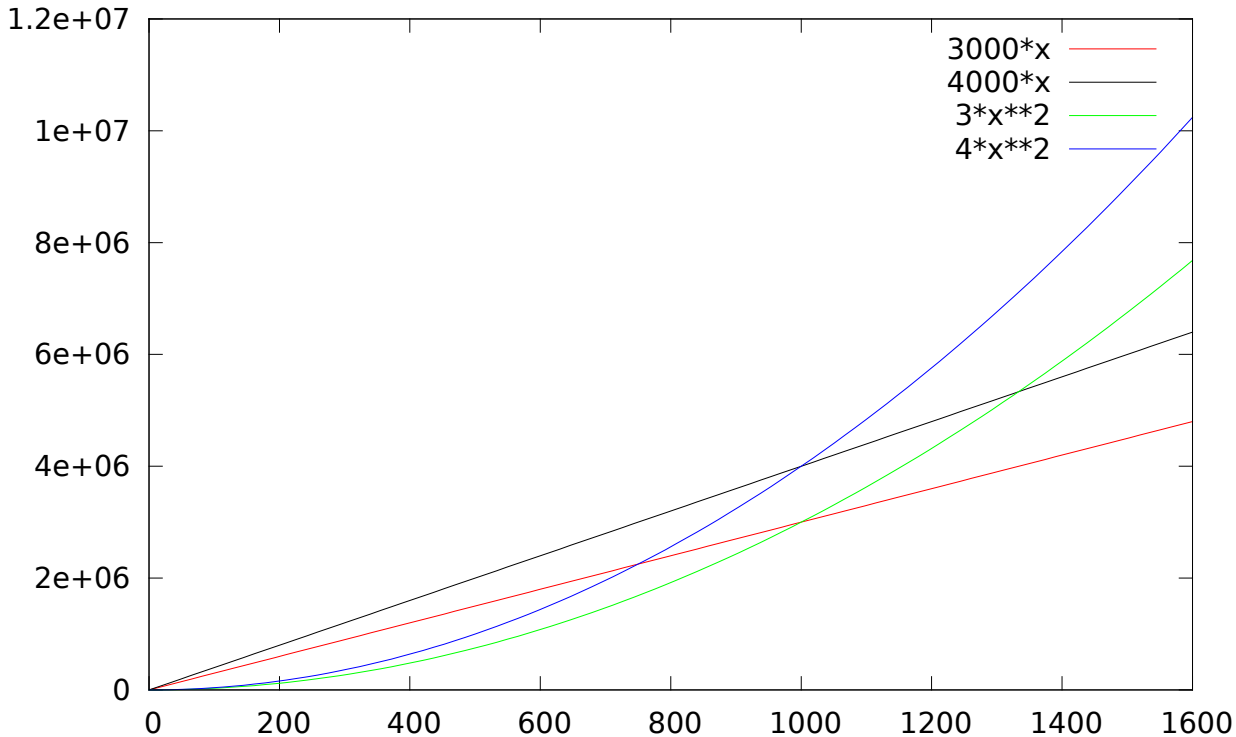
$3000n < 4n^2 \Leftrightarrow 3000/4 < n \Leftrightarrow 750 < n$

Multiplikative konstanter

Multiplikative konstanter ligegyldige hvis voksehastighed er forskellig:

$f(n) = 3000n$ $\quad$ $h(n) = 3n^2$

$g(n) = 4000n$ $\quad$ $k(n) = 4n^2$



$3000n < 4n^2 \Leftrightarrow 3000/4 < n \Leftrightarrow 750 < n$ $\quad$ $A \cdot n < B \cdot n^2 \Leftrightarrow A/B < n$

Voksehastighed

Vi ønsker at sammenligne funktioners essentielle voksehastighed på en måde, så der ses bort fra multiplikative konstanter.

Denne sammenligning skal bruges til at lave en grovsortering af algoritmer, inden vi laver implementationsarbejde.

For antag, at to algoritmer A og B har voksehastigheder, som gør at køretiden for algoritme B altid (for store nok n) vil blive større end køretiden for algoritme A, uanset hvilke multiplikative konstanter, der er i udtrykkene for voksehastigheder.

Så vil der som regel ikke være nogen pointe i at implementere algoritme B. Ingen tuning af koden vil kunne få den til at vinde over algoritme A (for store n).

Voksehastighed

Arbejdsprincip: Sammenlign først voksehastigheder af algoritmer, og implementer normalt kun den med laveste voksehastigheder. For to algoritmer med samme voksehastighed, implementer begge og mål deres køretider.

Asymptotisk notation

Så vi ønsker et værktøj til at sammenligne funktioners essentielle voksehastighed på en måde, så der ses bort fra multiplikative konstanter.

Asymptotisk notation

Så vi ønsker et værktøj til at sammenligne funktioners essentielle voksehastighed på en måde, så der ses bort fra multiplikative konstanter.

Mere præcist: vi ønsker for voksehastighed for funktioner sammenligninger svarende til de fem klassiske ordens-relationer:

$$\leq \quad \geq \quad = \quad < \quad >$$

De vil, af historiske årsager, blive kaldt for:

$$O \quad \Omega \quad \Theta \quad o \quad \omega$$

Hvilket udtales således:

"O", "Omega", "Theta", "lille o", "lille omega"

Følgende definitioner har vist sig at fungere godt:

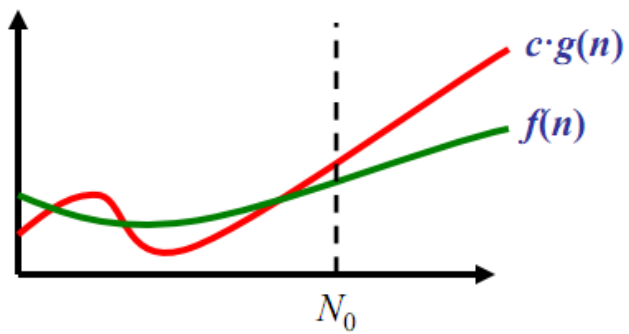
O

Definition: $f(n) = \mathrm{O}(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \longrightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$



Mening: $f \leq g$ i voksehastighed

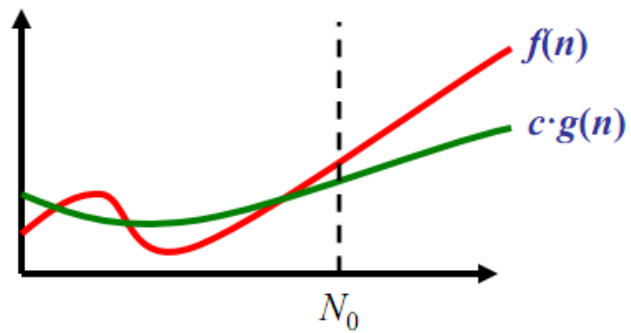
Omega

Definition: $f(n) = \Omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

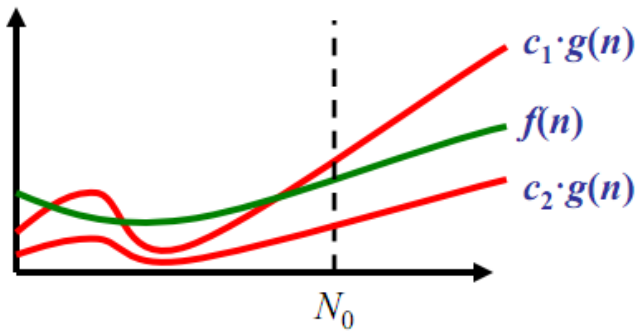


Mening: $f \geq g$ i voksehastighed

Theta

Definition: $f(n) = \theta(g(n))$

hvis $f(n)$=O($g(n)$) og $f(n)$= $\Omega(g(n)$



Mening: $f = g$ i voksehastighed

Lille o

Definition: $f(n) = o(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \to R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Mening: $f < g$ i voksehastighed

Lille omega

Definition: $f(n) = \omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \to R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Mening: $f > g$ i voksehastighed

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad \text{(jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y\text{)}$$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y\ )$$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \;\Leftrightarrow\; g(n) = \Omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x \leq y \Leftrightarrow y \geq x\ )$$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n)) \quad \text{(jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y\text{)}$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n)) \quad \text{(jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y \text{)}$$

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n)) \quad \text{(jvf. } x \leq y \Leftrightarrow y \geq x \text{)}$$

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n)) \quad \text{(jvf. } x < y \Leftrightarrow y > x \text{)}$$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \;\Leftrightarrow\; g(n) = \Omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x \leq y \Leftrightarrow y \geq x\ )$$

$$f(n) = o(g(n)) \;\Leftrightarrow\; g(n) = \omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Leftrightarrow y > x\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \text{ og } f(n) = \Omega(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = \Theta(g(n))$$
$$(\text{jvf. } x \leq y \text{ og } x \geq y \Rightarrow x = y\ )$$

Asymptotisk analyse i praksis

De asymptotiske forhold mellem de fleste funktioner f og g kan afklares ved følgende to sætninger:

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to k > 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = \Theta(g(n)) \qquad (1)$$

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = o(g(n)) \qquad (2)$$

Asymptotisk analyse i praksis

De asymptotiske forhold mellem de fleste funktioner f og g kan afklares ved følgende to sætninger:

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to k > 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = \Theta(g(n)) \qquad (1)$$

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = o(g(n)) \qquad (2)$$

Eksempler:

$$\frac{20n^2 + 17n + 312}{n^2} = \frac{20 + 17/n + 312/n^2}{1} \to \frac{20 + 0 + 0}{1} = 20 \text{ for } n \to \infty$$

Asymptotisk analyse i praksis

De asymptotiske forhold mellem de fleste funktioner f og g kan afklares ved følgende to sætninger:

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to k > 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = \Theta(g(n)) \qquad (1)$$

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = o(g(n)) \qquad (2)$$

Eksempler:

$$\frac{20n^2 + 17n + 312}{n^2} = \frac{20 + 17/n + 312/n^2}{1} \to \frac{20 + 0 + 0}{1} = 20 \text{ for } n \to \infty$$

$$\frac{20n^2 + 17n + 312}{n^3} = \frac{20/n + 17/n^2 + 312/n^3}{1} \to \frac{0 + 0 + 0}{1} = 0 \text{ for } n \to \infty$$

Asymptotisk analyse i praksis

Derudover er det godt at kende følgende fact fra matematik:

$$\text{For alle } a > 0 \text{ og } b > 1 \text{ gælder } \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty \tag{3}$$

Asymptotisk analyse i praksis

Derudover er det godt at kende følgende fact fra matematik:

$$\text{For alle } a > 0 \text{ og } b > 1 \text{ gælder } \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty \tag{3}$$

Dvs. ethvert polynomium er $o()$ af enhver exponentialfunktion

Asymptotisk analyse i praksis

Derudover er det godt at kende følgende fact fra matematik:

$$\text{For alle } a > 0 \text{ og } b > 1 \text{ gælder } \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty \tag{3}$$

Dvs. ethvert polynomium er $o()$ af enhver exponentialfunktion

Eksempelvis giver dette at:

$$\frac{n^{100}}{2^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

hvoraf ses

$$n^{100} = o(2^n)$$

Asymptotisk analyse i praksis

Samt følgende fact:

$$\text{For alle } a, d > 0 \text{ og } c > 1 \text{ gælder } \frac{(\log_c n)^a}{n^d} \to 0 \text{ for } n \to \infty \qquad (4)$$

Asymptotisk analyse i praksis

Samt følgende fact:

$$\text{For alle } a, d > 0 \text{ og } c > 1 \text{ gælder } \frac{(\log_c n)^a}{n^d} \to 0 \text{ for } n \to \infty \qquad (4)$$

Dvs. enhver logaritme (selv opløftet i enhver potens) er $o()$ af ethvert polynomium.

Asymptotisk analyse i praksis

Samt følgende fact:

$$\text{For alle } a, d > 0 \text{ og } c > 1 \text{ gælder } \frac{(\log_c n)^a}{n^d} \to 0 \text{ for } n \to \infty \qquad (4)$$

> Dvs. enhver logaritme (selv opløftet i enhver potens) er $o()$ af ethvert polynomium.

Eksempelvis giver dette at:

$$\frac{(\log n)^3}{n^{0.5}} \to 0 \text{ for } n \to \infty, \text{ hvoraf ses } (\log n)^3 = o(n^{0.5})$$

Asymptotisk analyse i praksis

Regel (4) kan i øvrigt nemt ses at være en variant af regel (3) (dette er ikke pensum):

For $c > 1$ og $d > 0$, sæt $N = \log_c(n)$ og $b = c^d$. Så haves

$$\frac{(\log_c n)^a}{n^d} = \frac{N^a}{(c^{\log_c(n)})^d} = \frac{N^a}{c^{d \log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^{\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^N} = \frac{N^a}{b^N}$$

Da $\log_c(n)$ er en voksende og ubegrænset funktion, gælder at $n \to \infty$ er det samme som $N = \log_c(n) \to \infty$.

Større eksempel

Regel (1)–(4) forklarer, at følgende funktioner er sat i stigende voksehastighed (den ene er $o()$ af den næste):

$$1, \quad \log n, \quad \sqrt{n}, \quad n, \quad n \log n,$$

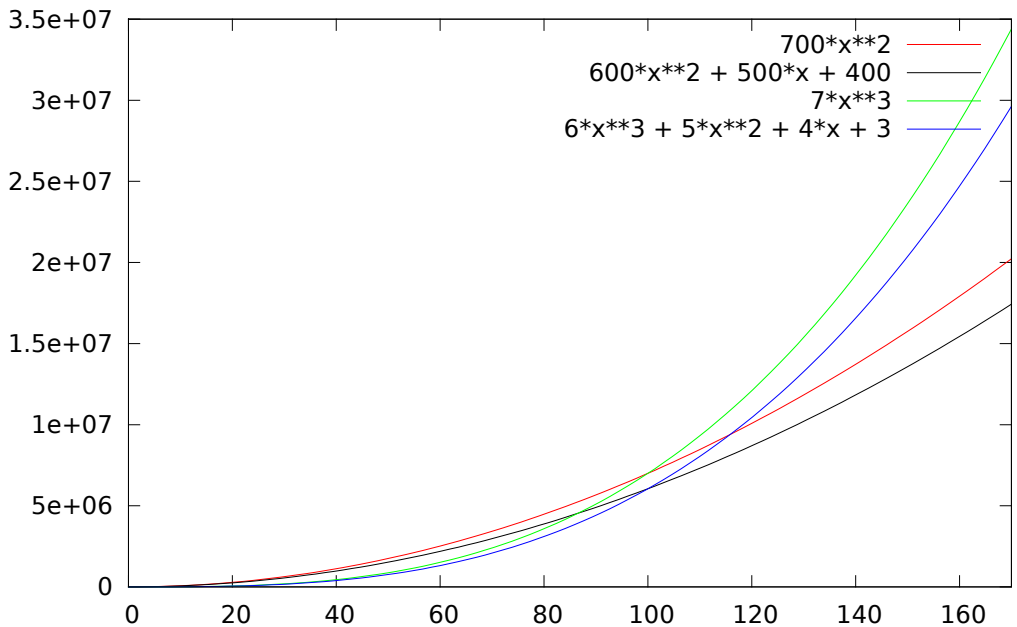
$$n\sqrt{n}, \quad n^2, \quad n^3, \quad n^{10}, \quad 2^n$$

Dominerende led

Bemærk, at dominerende led (led med højeste voksehastighed) bestemmer samlet voksehastighed. Eksempel (figur):

$$f(n) = 700n^2 \qquad g(n) = 7n^3$$

$$h(n) = 600n^2 + 500n + 400 \qquad k(n) = 6n^3 + 5n^2 + 4n + 3$$

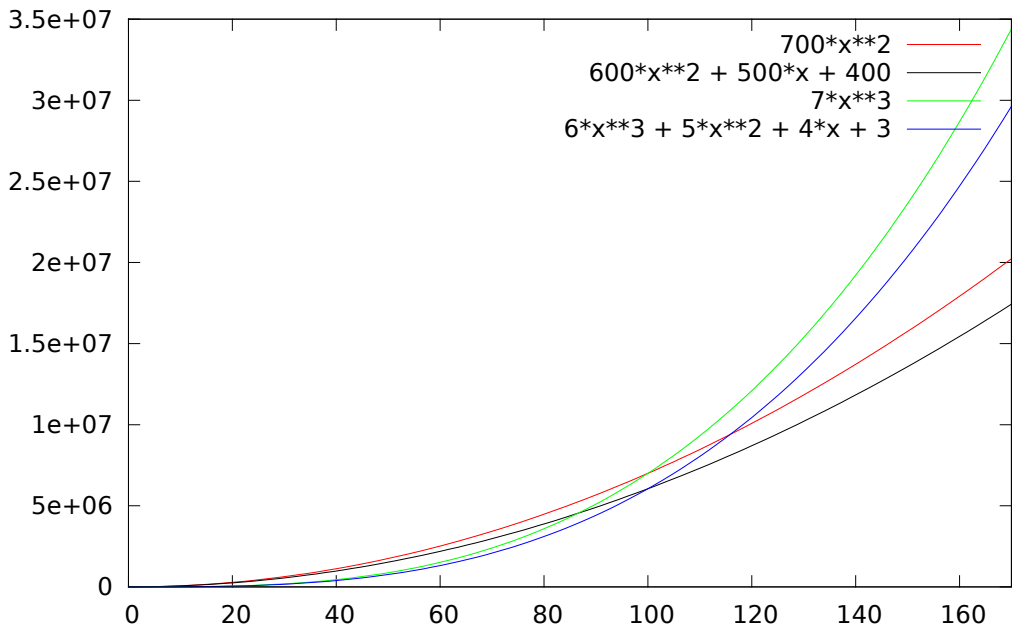


Dominerende led

Bemærk, at dominerende led (led med højeste voksehastighed) bestemmer samlet voksehastighed. Eksempel (figur):

$$f(n) = 700n^2 \qquad g(n) = 7n^3$$

$$h(n) = 600n^2 + 500n + 400 \qquad k(n) = 6n^3 + 5n^2 + 4n + 3$$



Figuren passer med beregninger:

Dominerende led

$$\frac{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3}{7n^3} = \frac{6 + 5/n + 4/n^2 + 3/n^3}{7} \to \frac{6 + 0 + 0 + 0}{7} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $6n^3 + 5n^2 + 4n + 3 = \Theta(7n^3)$

Dominerende led

$$\frac{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3}{7n^3} = \frac{6 + 5/n + 4/n^2 + 3/n^3}{7} \to \frac{6 + 0 + 0 + 0}{7} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $6n^3 + 5n^2 + 4n + 3 = \Theta(7n^3)$

$$\frac{600n^2 + 500n + 400}{700n^2} = \frac{600 + 500/n + 400/n^2}{700} \to \frac{600 + 0 + 0}{700} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $600n^2 + 500n + 400 = \Theta(700n^2)$

Dominerende led

$$\frac{6n^3+5n^2+4n+3}{7n^3} = \frac{6+5/n+4/n^2+3/n^3}{7} \to \frac{6+0+0+0}{7} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $6n^3+5n^2+4n+3 = \Theta(7n^3)$

$$\frac{600n^2+500n+400}{700n^2} = \frac{600+500/n+400/n^2}{700} \to \frac{600+0+0}{700} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $600n^2+500n+400 = \Theta(700n^2)$

$$\frac{600n^2+500n+400}{6n^3+5n^2+4n+3} = \frac{600/n+500/n^2+400/n^3}{6+5/n+4/n^2+3/n^3} \to \frac{0+0+0}{6+0+0+0} = 0 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $600n^2+500n+400 = o(6n^3+5n^2+4n+3)$