Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

30. april 2023
RF

Opgaver Uge 18

SE4-DMAD

A: Løses i løbet af øvelsestimerne i uge 18

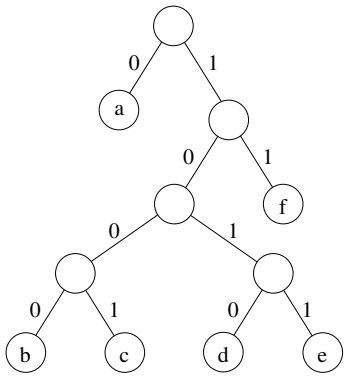
1. Eksamen januar 2007, opgave 2:

Spørgsmål a (8%): Betragt alfabetet med de seks tegn a, b, c, d, e, f. Nedenstående tabel viser, hvor tit hvert enkelt tegn optræder i en given tekst.

a	b	c	d	e	f
33	28	52	20	10	12

Tegn Huffman-træet, som repræsenterer Huffman-koderne for dette eksempel. □

Spørgsmål b (7%): Brug følgende Huffman-træ



til at dekode 1101001010101011 □

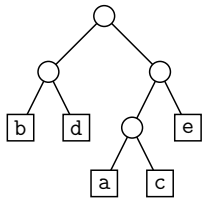
2. Eksamen juni 2012, opgave 5:

I denne opgave ser vi på en fil som indeholder nedenstående tegn med de angivne hyppigheder.

Tegn	a	b	c	d	e
Hyppighed	100	150	150	250	350

Træet H_1 er et Huffman-træ for denne fil.

H_1:



Spørgsmål a (5%):

Angiv hvor mange bits filen fylder når den er kodet ved træet H_1.

□

Spørgsmål b (5%):

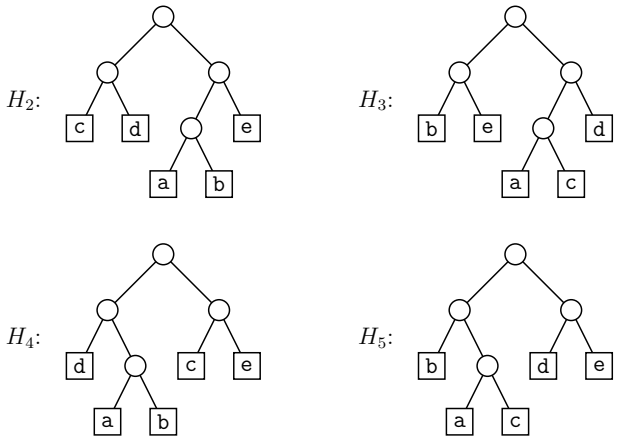
Angiv hvad følgende streng dekodes til ved træet H_1 (under brug af bogens konvention at 0 svarer til venstre og 1 svarer til højre).

1000000110110101

□

Spørgsmål c (5%):

Alle træerne H_2, H_3, H_4 og H_5 er optimale for filen med ovenstående tabel. Angiv hvilke af træerne som kan fremkomme ved Huffmans algoritme.



□

3. Cormen et al., 4. udgave, øvelse 19.2-2 (side 526) [Cormen et al., 3. udgave: øvelse 21.2-2 (side 567)]:

   Vi ser her på disjoints sets implementeret via lænkede lister og brug af weighted-union heuristikken for UNION (dvs. at den korteste liste appendes til den længste liste). For nedenstående række af operationer, angiv datastrukturens udseende ved afslutningen, samt hvilket element, som de to FIND-SET operationer returnerer. Hvis listen med x_i og listen med x_j har samme længde i en operation UNION(x_i, x_j), append da listen med x_j til listen med x_i.

   for $i = 1$ **to** 16
       MAKE-SET(x_i)
   for $i = 1$ **to** 15 **by** 2
       UNION(x_i, x_{i+1})
   for $i = 1$ **to** 13 **by** 4
       UNION(x_i, x_{i+2})
   UNION(x_1, x_5)
   UNION(x_{11}, x_{13})
   UNION(x_1, x_{10})
   FIND-SET(x_2)
   FIND-SET(x_9)

   Dine tegninger behøver ikke være lige så detaljerede som i Figur 19.2 (side 524) [Cormen et al., 3. udgave: Figur 21.2 (side 565)].)

4. Vi ser her på disjoints sets implementeret via lænkede lister og brug af weighted-union heuristikken for UNION (dvs. at den korteste liste appendes til den længste liste). Beskriv hvordan denne implementation kan laves, selv hvis header-objekter ikke indeholder en tail-pointer og ikke gemmer listens længde. Den asymptotiske køretid af operationerne skal selvfølgelig ikke blive ændret. [Hint: løb lister igennem synkront. Husk opdatering af elementers pointer til header.]

5. Cormen et al., 4. udgave, øvelse 19.3-1 (side 531) [Cormen et al., 3. udgave: øvelse 21.3-1 (side 572)]:

   Vi ser her på disjoints sets implementeret via træer og brug af både union by rank og path compression. Gentag opgave 3 med denne datastruktur. Husk at angive rank for knuder på dine tegninger.

6. Cormen et al., 4. udgave, øvelse 19.3-2 (side 531) [Cormen et al., 3. udgave: øvelse 21.3-2 (side 572)]:

   For disjoints sets implementeret via træer: lav en version af FIND-SET, som ikke bruger rekursion. [Hint: løb stien igennem to gange.]

7. Cormen et al., 4. udgave øvelse 22.1-1 (side 592):

   Givet naboliste-strukturen for en graf, hvor lang tid tager det at beregne udgraden (out-degree) for alle knuder? Samme spørgsmålet for indgraden (in-degree). Ændrer disse tider sig, hvis man kun ønsker svarene for én specfik knude?

8. Cormen et al., 4. udgave øvelse 22.1-3 (side 592):

   For en orienteret graf G, lad G^T (G transponeret) betegne grafen med alle kanter vendt. Find en algoritme, som konstruerer naboliste-strukturen for G^T ud fra naboliste-strukturen for G. Hvad er køretiden for din algoritme?

Bemærk: resten af opgaverne er repetition af tidligere stof.

9. Eksamen juni 2011, opgave 3, spørgsmål **a**, **b** og **d**:

I denne opgave ser vi på sortering i to special-tilfælde:

1. Alle nøgler er forskellige, og input er omvendt sorteret; d.v.s. nøglerne optræder i faldende orden. Eks: $\{12, 9, 8, 5, 2\}$.
2. Alle nøgler er ens. Eks: $\{5, 5, 5, 5, 5\}$.

I begge tilfælde antages det, at alle nøgler er heltal mellem 0 og n^5, hvor n er antallet af nøgler, der skal sorteres.

Spørgsmål a (6%): Angiv køretiden for Insertion Sort i hvert af de to tilfælde. □

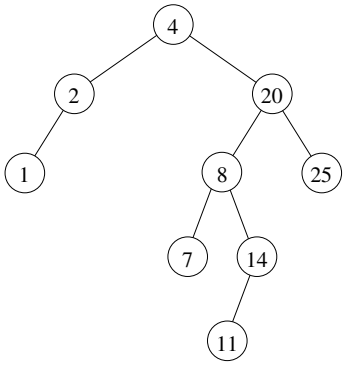
Spørgsmål b (6%): Angiv køretiden for Quicksort i hvert af de to tilfælde. □

Spørgsmål c (6%): Angiv køretiden for Heapsort i hvert af de to tilfælde. □

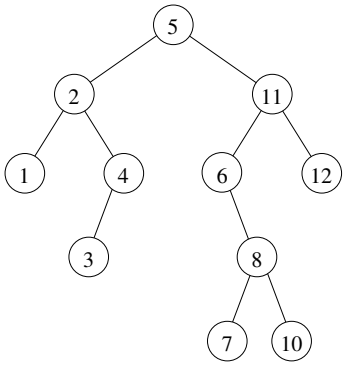
Spørgsmål d (6%): Angiv den bedst mulige køretid for Radix Sort i hvert af de to tilfælde. □

10. Eksamen januar 2007, opgave 1 (sidehenvisningerne skal være til side 325 (opgave b) og 321 (opgave c) i Cormen et al., 4. udgave [Cormen et al., 3. udgave: side 298 og 294] i stedet for de angivne sider 261 og 262):

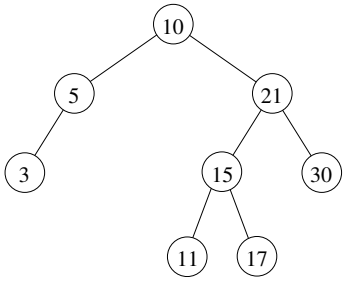
Spørgsmål a (5%): Er nedenstående et binært søgetræ?



Spørgsmål b (8%): Betragt nedenstående binære søgetræ. Tegn træet, som det ser ud, efter at knuden med nøgle 5 er slettet. Du skal bruge algoritmen fra lærebogen (s. 261).



Spørgsmål c (7%): Betragt nedenstående binære søgetræ. Tegn træet, som det ser ud, efter at en knude med nøgle 16 er blevet indsat. Du skal bruge algoritmen fra lærebogen (s. 262).



11. Eksamen juni 2009, opgave 1 a:

Spørgsmål a (7%): Udfør HEAP-EXTRACT-MAX på den binære hob repræsenteret ved nedenstående array.

10	7	6	5	4	2	3	1	2	3	1	1

Vis hvert skridt. Det kan være en god ide at tegne træ-repræsentationen fremfor array-repræsentationen. □

12. Eksamen juni 2010, opgave 5:

I denne opgave ønsker vi at udvide binære søgetræer med oplysninger om afstandene mellem de gemte nøgler, og specielt ønsker vi at kunne finde den største afstand i træet mellem en nøgle og dens predecessor.

Mere præcist, hvis et søgetræ gemmer n nøgler $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n$, er de søgte afstande $(x_2 - x_1), (x_3 - x_2), \cdots, (x_n - x_{n-1})$, og vi ønsker at kunne finde den største af disse. Hvis eksempelvis nøglerne gemt i træet er 3, 5, 11, 14, 23 og 30, er afstandene 2, 6, 3, 9 og 7, og største afstand er 9, som opnås mellem nøglen 23 og den predecessor 14.

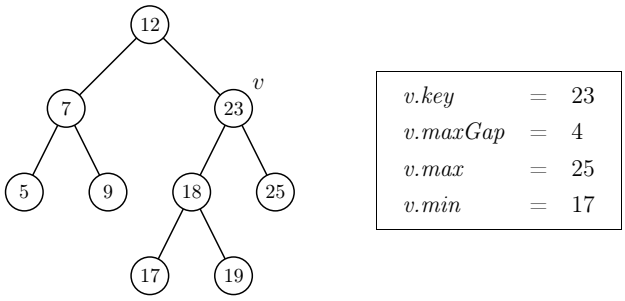
Vi udstyrer nu enhver knude v i søgetræet med følgende tre ekstra informationer (udover den i knuden gemte nøgle $v.key$):

1. Største afstand mellem nøgler gemt i v's undertræ ($v.maxGap$).
2. Største nøgle gemt i v's undertræ ($v.max$).
3. Mindste nøgle gemt i v's undertræ ($v.min$).

(Husk at en knudes undertræ inkluderer knuden selv. Hvis der kun er én nøgle i v's undertræ, sættes $v.maxGap$ lig nul.)

Specielt kan største afstand i træet herved aflæses af roden r's information $r.maxGap$ i $O(1)$ tid.

Et eksempel på et binært søgetræ og informationen i en af dets knuder kan ses i Figur 6.



Figur 6: Eksempel på informationen i en knude

Spørgsmål a (6%):

Angiv hvordan en knudes informationer kan bestemmes i $O(1)$ tid ud fra informationerne i knudens to børn, samt knudens og børnenes nøgler.

(Et eller begge af børnene kan være NIL, hvilket giver (simple) specialtilfælde som du ikke behøver beskrive).

Vi lader nu søgetræet være et rød-sort træ.

Spørgsmål b (4%):

Argumentér for at informationerne i træets knuder kan vedligeholdes under indsættelser og sletninger, uden at ændre køretiden $O(\log n)$ for disse.

□

Som sagt kan man i $O(1)$ tid finde den største afstand i træet mellem nøgler og deres predecessorer ved at aflæse roden r's information $r.maxGap$. Vi ønsker nu også at kunne finde en konkret nøgle i træet som har denne afstand til sin predecessor.

Spørgsmål c (5%):

Beskriv en søgeproces som i $O(\log n)$ tid finder en sådan nøgle.

□

B: Løses hjemme inden øvelsestimerne i uge 19

1. Eksamen januar 2005, opgave 5:

   Denne opgave handler om at sortere n heltal med mange dubletter.

   Spørgsmål a: Beskriv en algoritme, der sorterer n heltal i tid $O(n \log(\log n))$, hvis der kun er $O(\log n)$ forskellige tal. Det antages, at to tal kan sammenlignes i konstant tid (d.v.s. i tid $O(1)$).
   Hint: Benyt en passende valgt datastruktur til at indsætte i, og saml dubletterne.

   Bemærk, at forskellen mellem to tal sagtens kan være $\omega(\log n)$. D.v.s. selvom der kun er $O(\log n)$ forskellige tal, kan der være stor forskel på størrelsen af tallene.

   Forklar, hvordan den sorterede følge kan aflæses fra datastrukturen og udskrives i tid $O(n)$. □

2. ($*$) Cormen et al., 4. udgave, problem 15.1 (side 446) [Cormen et al., 3. udgave: problem 16.1 (side 446)]:

   Denne opgave handler om at finde en måde at betale et heltalsbeløb n med det færrest mulige antal mønter. Overordnet viser opgaven, at design af et lands møntsæt kræver overvejelse, for at det bliver simpelt at give penge tilbage (dvs. at en naturlig grådig algoritme fungerer) i en kontanthandel.

(a) Vi ser her på det amerikanske møntsæt med quarters, dimes, nickels og pennies (25 cent, 10 cent, 5 cent og 1 cent). Beskriv en grådig algoritme, som finder det færreste antal mønter, der tilsammen udgør et givet beløb på n cent. Bevis, at algoritmen er korrekt.

Hint: Vis, at der altid er en optimal løsning bestående af dit første grådige valg samt en optimal løsning til rest-problemet. Det kan hjælpe at se på en optimal løsning, og stille dens mønter op sorteret faldende efter størrelse. Argumentet ligner det for næste spørgsmål (som evt. kan løses først).

(b) Vis, at hvis der for et møntsæt med møntstørrelser $m_1 = 1, m_2, \ldots, m_k$ gælder, at m_i går op i m_{i+1} for alle i, da virker den grådige algoritme fra spørgsmål **a**. (Dette spørgsmål er ikke helt det samme som i bogen, men er en generalisering af dette).

Hint: samme som for sidste spørgsmål.

(c) Find et møntsæt og et beløb n hvor den grådige algoritme ikke virker (dvs. ikke finder det mindste antal mønter). I dit møntsæt skal den mindste mønt have værdien én, hvilket sikrer, at alle beløb n kan opnås.

Hint: et møntsæt med tre mønter og et beløb n under ti er nok.

(d) Beskriv en algoritme, som i tid $O(kn)$ altid finder det mindste antal mønter til at opnå et beløb n, hvor k er antallet af forskellige mønttyper (hvoraf den mindste har værdien én, således at alle beløb kan opnås).

Hint: Brug dynamisk programmering i stedet for grådighed. Det vil være nok med en tabel $R[i]$ af størrelse $1 \times n$, hvor $R[i]$ indeholder antallet af mønter i en optimal løsning for beløbet i. Tænk derudover lidt som for guldkæde-problemet (se slides om dynamisk programmering)—en optimal løsning for beløb i må indeholde enten en mønt af type 1, eller en af type 2, eller en af type 3, og så videre.