Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

19. maj 2023
RF

Opgaver Uge 21

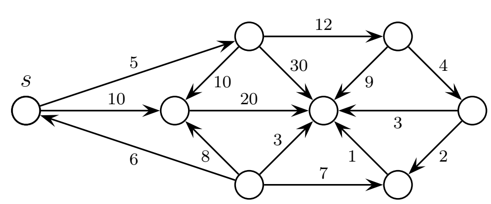
DM507/DM578/DS814/SE4-DMAD

Denne uge er den sidste i semesteret, så der er ingen øvelsestimer i ugen efter. Derfor er denne uges øvelsestimer planlagt mere traditionelt: det antages, at alle deltagere har forsøgt at *regne opgaverne på forhånd*, og timerne handler om at gennemgå alle opgaverne (dvs. at der er ikke afsat tid i timerne til at regne opgaverne forfra).

Løses hjemme inden øvelsestimerne i denne uge

1. Eksamen juni 2010, opgave 2, spørgsmål c:

   Spørgsmål c (6%): For alle knuder v i grafen G_3, angiv distanceværdien $v.d$ som tildeles ved kørsel af Dijkstras algoritme med start i knuden s.



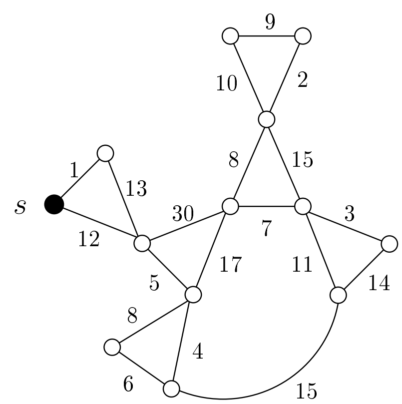
Figur 3: Grafen G_3

2. Eksamen januar 2008, opgave 2, spørgsmål c:

Spørgsmål c (8%): Vi ser igen på den samme graf som i spørgsmål b (se nedenfor). Tegn et korteste-vej-træ med rod i den sorte knude s. Dvs. tegn de korteste veje fra s til hver af de andre knuder i grafen.

Du kan evt. bruge tegningen på sidste side.

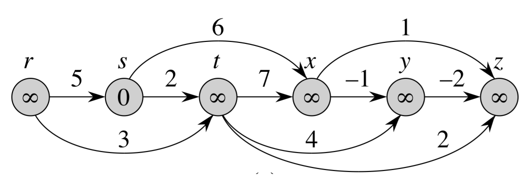
Husk at argumentere for, at dit resultat er rigtigt.



Hint: du skal bruge Dijkstras algoritme. Der spørges om $v.\pi$-værdierne. Giv også $v.d$-værdierne. Du behøver ikke argumentere for korrekhed (dvs. se bort fra sidste linje i opgaven).

3. Cormen et al., 4. udgave, øvelse 22.2-1 (side 619) [Cormen et al., 3. udgave: øvelse 24.2-1 (side 657)]:

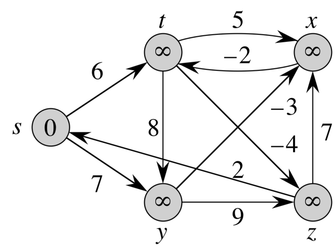
   Kør Dag-Shortest-Paths på nedenstående graf, med r som startknude.



   NB: de viste v-værdier er efter initialisering med s som startknude (fra et eksempel i bogen), og skal ændres så $r.d = 0$ og $s.d = \infty$.

4. Cormen et al., 4. udgave, øvelse 22.1-1 (side 615) [Cormen et al., 3. udgave: øvelse 24.1-1 (side 654)]:

   Kør Bellman-Ford på nedenstående graf, med z som startknude.



NB: de viste v-værdier er efter initialisering med s som startknude (fra et eksempel i bogen), og skal ændres så $z.d = 0$ og $s.d = \infty$.

Angiv v- og π-værdierne i alle knuder efter hvert gennemløb af kanterne. Antag, at kanterne gennemløbes i følgende rækkefølge: (t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y).

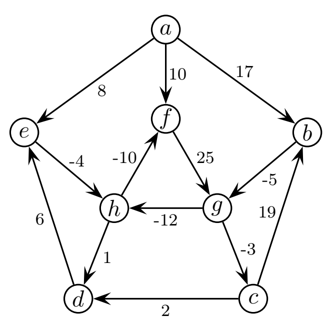
Hvad sker der i Bellman-Ford, hvis kanten (z, x) i stedet har vægt 4?

5. Eksamen juni 2012, opgave 4:

Spørgsmål a (10%):

For alle knuder $v = a, b, \ldots, h$ i grafen G_1, angiv værdien $v.d$ der beregnes af Bellman-Fords algoritme, når den køres for at finde distancen fra knuden a til alle andre knuder.

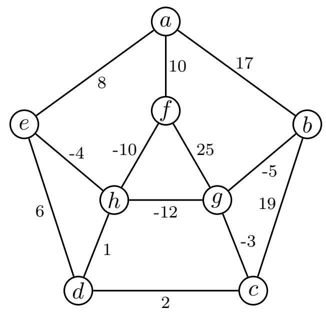
G_1:



Spørgsmål b (10%):

For grafen G_2, angiv kanterne i et minimum spanning tree (MST). De skal angives i den rækkefølge, som de vælges i af Kruskals algoritme. En kant med endepunkter u og v skrives som sædvanligt (u, v).

G_2:

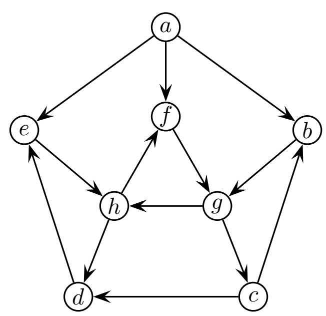


Spørgsmål c (10%):

For alle knuder $v = a, b, \ldots, h$ i grafen G_3, angiv starttiden (discovery time) $v.d$ og sluttiden (finishing time) $v.f$ som tildeles ved dybde-først søgning (DFS) med start i knuden a.

For DFS afhænger resultatet af ordningen af knuders nabolister. Du skal her antage at på figuren er en knudes naboliste sorteret i alfabetisk orden efter naboknudernes navne.

G_3:



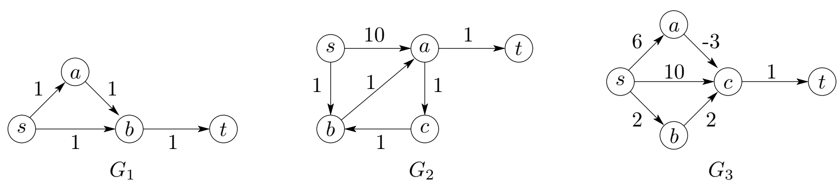
6. Eksamen juni 2011, opgave 4:

I denne opgave ser vi på tre forskellige algoritmer anvendt på hver af de tre vægtede grafer i figur 4. Som sædvanligt er længden af en vej i en vægtet graf summen af vægtene på kanterne i vejen.

Spørgsmål a (6%): For hvilke af de tre grafer i figur 4 kan man bruge Bredde-Først-Søgning til at beregne den korteste afstand fra s til t? ☐

Spørgsmål b (6%): For hvilke af de tre grafer i figur 4 kan man bruge DAG-SHORTEST-PATHS til at beregne den korteste afstand fra s til t? ☐

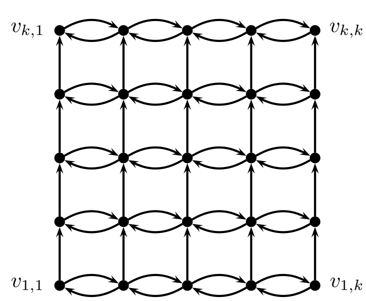
Spørgsmål c (6%): For hvilke af de tre grafer i figur 4 kan man bruge Dijkstras Algoritme til at beregne den korteste afstand fra s til t? ☐



Figur 4: Tre vægtede grafer

7. Eksamen juni 2014, opgave 10:

En *kvadrat-graf* er en orienteret graf med k rækker, hver med k knuder, og med kanter som illustreret i figuren nedenfor (for $k = 5$).



Mere præcist har en kvadrat-graf knuder $v_{i,j}$ for $i = 1, 2, \ldots, k$ (rækkenummer) og $j = 1, 2, \ldots, k$ (søjlenummer), samt kanter $(v_{i,j}, v_{i+1,j})$, $(v_{i,j}, v_{i,j+1})$ og $(v_{i,j}, v_{i,j-1})$ for alle værdier af i, j for hvilke begge kantens knuder eksisterer.

I resten af denne opgave antager vi at alle kanterne i en kvadrat-graf har en ikke-negativ vægt.

Spørgsmål a (3%):

Lad n og m betegne henholdsvis antal knuder og antal kanter i en kvadrat-graf. Udtryk n og m som funktion af k.

Spørgsmål b (4%):

Angiv udførselstiden for Dijkstra's algoritme som funktion af k når den udføres på en kvadrat-graf med start i knuden $v_{1,1}$.

Spørgsmål c (8%):

Konstruér en algoritme som i tid $O(m)$ finder længden af de korteste veje fra knuden $v_{1,1}$ til alle øvrige knuder i en kvadrat-graf. Beskriv (i ord eller pseudokode) algoritmen, og argumenter for algoritmens køretid og korrekthed.

Hint: Lemma 24.15 (side 673) fra lærebogen kan være inspirerende.

I hintet skal henvisningen i 4. udgave af lærebogen være til Lemma 22.15 på side 635. Lemmaet findes også i slides.