Sortering

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 9$$

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 9$$

Mange opgaver er hurtigere i sorteret information (tænk på ordbøger, adresselister i telefoner,...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 9$$

Mange opgaver er hurtigere i sorteret information (tænk på ordbøger, adresselister i telefoner,...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

$\boxed{\text{Sortering af information er en fundamental og central opgave.}}$

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 9$$

Mange opgaver er hurtigere i sorteret information (tænk på ordbøger, adresselister i telefoner,...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering af information er en fundamental og central opgave.

Mange algoritmer er udviklet: Insertionsort, Selectionsort, Bubblesort, Mergesort, Quicksort, Heapsort, Radixsort, Countingsort, ...

Vi skal møde alle ovenstående i dette kursus.

Sortering

Kommentarer:

- Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.

Sortering

Kommentarer:

- Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.
- Vi vil antage, at input ligger i et array (Java) / en liste (Python).

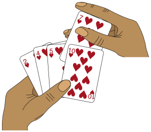
Sortering

Kommentarer:

- Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.
- Vi vil antage, at input ligger i et array (Java) / en liste (Python).
- Man sorterer ofte elementer sammensat af en sorteringsnøgle samt yderligere information. Sorteringsnøglen kan være et tal, eller andet der kan sammenlignes (f.eks. strenge/ord). Vi viser i dette kursus blot elementer som rene tal.

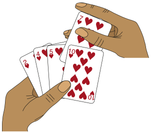
Insertionsort

Bruges af mange, når man sorterer en hånd i kort:

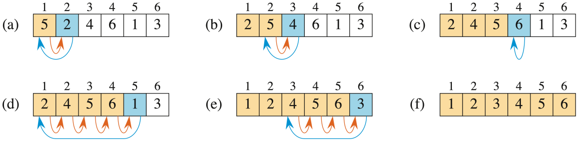


Insertionsort

Bruges af mange, når man sorterer en hånd i kort:

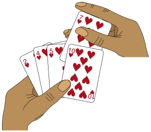


Samme idé udført på tal i et array:

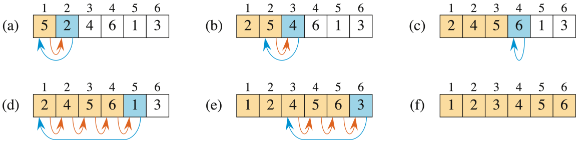


Insertionsort

Bruges af mange, når man sorterer en hånd i kort:



Samme idé udført på tal i et array:

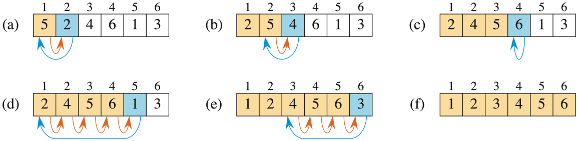


Argument for korrekthed: Del af array til venstre for sorte felt er altid sorteret. Denne del udvides med én hele tiden ($\Rightarrow$ algoritmen stopper, og når den stopper er alle elementer sorteret).

Insertionsort

Som pseudo-kode:

```
INSERTION-SORT(A, n)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    // Insert A[i] into the sorted subarray A[1 : i − 1].
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```



Køretid for Insertionsort

Analyse:

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $i = 2$ **to** n	c_1	n
$key = A[i]$	c_2	$n - 1$
// Insert $A[i]$ into the sorted subarray $A[1 : i - 1]$.	0	$n - 1$
$j = i - 1$	c_4	$n - 1$
while $j > 0$ and $A[j] > key$	c_5	$\sum_{i=2}^{n} t_i$
$A[j + 1] = A[j]$	c_6	$\sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$j = j - 1$	c_7	$\sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$A[j + 1] = key$	c_8	$n - 1$

Her er t_j hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres. Dvs. $t_j - 1$ er hvor mange gange løkken kører (hvilket er hvor mange elementer det j'te element skal forbi under indsættelsen). Sæt $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_8$.

Køretid for Insertionsort

Analyse:

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $i = 2$ **to** n	c_1	n
$key = A[i]$	c_2	$n-1$
// Insert $A[i]$ into the sorted subarray $A[1:i-1]$.	0	$n-1$
$j = i - 1$	c_4	$n-1$
while $j > 0$ and $A[j] > key$	c_5	$\sum_{i=2}^{n} t_i$
$A[j+1] = A[j]$	c_6	$\sum_{i=2}^{n}(t_i - 1)$
$j = j - 1$	c_7	$\sum_{i=2}^{n}(t_i - 1)$
$A[j+1] = key$	c_8	$n-1$

Her er t_j hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres. Dvs. $t_j - 1$ er hvor mange gange løkken kører (hvilket er hvor mange elementer det j'te element skal forbi under indsættelsen). Sæt $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_8$.

Best case: $t_j = 1$ for alle j. Samlet tid $\leq c \cdot n$.

Køretid for Insertionsort

Analyse:

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $i = 2$ **to** n	c_1	n
$\quad$ $key = A[i]$	c_2	$n-1$
$\quad$ // Insert $A[i]$ into the sorted subarray $A[1:i-1]$.	0	$n-1$
$\quad$ $j = i-1$	c_4	$n-1$
$\quad$ **while** $j > 0$ and $A[j] > key$	c_5	$\sum_{i=2}^{n} t_i$
$\quad\quad$ $A[j+1] = A[j]$	c_6	$\sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$\quad\quad$ $j = j-1$	c_7	$\sum_{i=2}^{n} (t_i - 1)$
$\quad$ $A[j+1] = key$	c_8	$n-1$

Her er t_j hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres. Dvs. $t_j - 1$ er hvor mange gange løkken kører (hvilket er hvor mange elementer det j'te element skal forbi under indsættelsen). Sæt $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_8$.

Best case: $t_j = 1$ for alle j. Samlet tid $\leq c \cdot n$.

Worst case: $t_j = j$ for alle j. Samlet tid $\leq c \cdot n^2$, da

$$\sum_{j=1}^{n} j = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \leq \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

indListe = input
udListe = tom liste
while *indListe* ikke tom:
    find mindste element x i *indListe*
    flyt x fra *indListe* til enden af *udListe*

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

> *indListe* = input
> *udListe* = tom liste
> **while** *indListe* ikke tom:
>   find mindste element x i *indListe*
>   flyt x fra *indListe* til enden af *udListe*

Klart **korrekt**, dvs. giver sorteret output (hvert element, som udtages, må være mindst lige så stort som det foregående).

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

> *indListe* = input
> *udListe* = tom liste
> **while** *indListe* ikke tom:
>   find mindste element x i *indListe*
>   flyt x fra *indListe* til enden af *udListe*

Klart **korrekt**, dvs. giver sorteret output (hvert element, som udtages, må være mindst lige så stort som det foregående).

Køretid?

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

indListe = input
udListe = tom liste
while *indListe* ikke tom:
  find mindste element x i *indListe*
  flyt x fra *indListe* til enden af *udListe*

Klart **korrekt**, dvs. giver sorteret output (hvert element, som udtages, må være mindst lige så stort som det foregående).

Køretid?

I alt n gange findes mindste element i *IndListe*.

En simpel metode til er finde mindste element er lineær søgning, som kigger én gang på hvert tilbageværende element.

Derved bliver tiden $\leq c \cdot (n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) \leq c \cdot n^2$.

Merge

Input: To **sorterede** rækker A og B
Output: De samme elementer i én sorteret række C

Eksempel:

$A = 2,4,5,7,8$
$B = 1,2,3,6$
$C = 1,2,2,3,4,5,6,7,8$

Merge

Input: To **sorterede** rækker A og B
Output: De samme elementer i én sorteret række C

Eksempel:

$A = 2,4,5,7,8$
$B = 1,2,3,6$
$C = 1,2,2,3,4,5,6,7,8$

Vi kan naturligvis sortere $A \cup B$.

Merge

Input: To **sorterede** rækker A og B
Output: De samme elementer i én sorteret række C

Eksempel:

$$A = 2,4,5,7,8$$
$$B = 1,2,3,6$$
$$C = 1,2,2,3,4,5,6,7,8$$

Vi kan naturligvis sortere $A \cup B$.

Men det er hurtigere at flette (**merge**):

Repeat:
Flyt det mindste af de to forreste elementer

Merge

Input: To **sorterede** rækker A og B
Output: De samme elementer i én sorteret række C

Eksempel:

$$A = 2,4,5,7,8$$
$$B = 1,2,3,6$$
$$C = 1,2,2,3,4,5,6,7,8$$

Vi kan naturligvis sortere $A \cup B$.

Men det er hurtigere at flette (**merge**):

Repeat:
Flyt det mindste af de to forreste elementer

Køretid: $\leq c \cdot n$, hvor $n =$ antal elementer i alt i $A \cup B$.

Merge

Input: To **sorterede** rækker A og B
Output: De samme elementer i én sorteret række C

Eksempel:

$A = 2,4,5,7,8$
$B = 1,2,3,6$
$C = 1,2,2,3,4,5,6,7,8$

Vi kan naturligvis sortere $A \cup B$.

Men det er hurtigere at flette (**merge**):

Repeat:
Flyt det mindste af de to forreste elementer

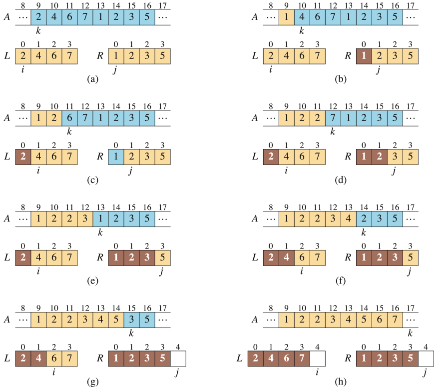
Køretid: $\leq c \cdot n$, hvor $n =$ antal elementer i alt i $A \cup B$.

Korrekthed: Merge kan ses som en udgave af Selectionsort, der udnytter, at den mindste i (resten) af input A og B kan findes ved kun at se på de to forreste i A og B (hvilket tager konstant tid).

Eksempel på merge

Her antages, at de to input-lister er nabodele af samme array/liste A, nemlig $A[p \dots q]$ og $A[q+1 \dots r]$.

(Bemærk, at i bogens notation er $A[p \dots q]$ lig elementerne $A[p]$, $A[p+1]$,..., $A[q]$, hvilket er ét element mere end næsten samme notation i Python.)

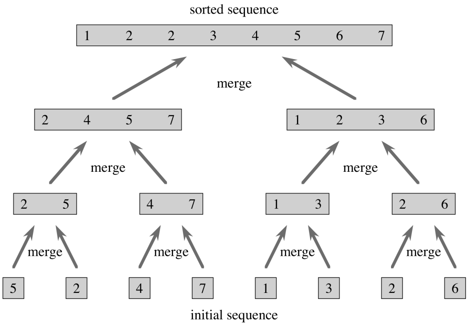


Pseudo-kode for Merge

```
MERGE(A, p, q, r)
nL = q - p + 1              // length of A[p : q]
nR = r - q                  // length of A[q + 1 : r]
let L[0 : nL - 1] and R[0 : nR - 1] be new arrays
for i = 0 to nL - 1         // copy A[p : q] into L[0 : nL - 1]
    L[i] = A[p + i]
for j = 0 to nR - 1         // copy A[q + 1 : r] into R[0 : nR - 1]
    R[j] = A[q + j + 1]
i = 0                       // i indexes the smallest remaining element in L
j = 0                       // j indexes the smallest remaining element in R
k = p                       // k indexes the location in A to fill
// As long as each of the arrays L and R contains an unmerged element,
//     copy the smallest unmerged element back into A[p : r].
while i < nL and j < nR
    if L[i] ≤ R[j]
        A[k] = L[i]
        i = i + 1
    else A[k] = R[j]
        j = j + 1
    k = k + 1
// Having gone through one of L and R entirely, copy the
//     remainder of the other to the end of A[p : r].
while i < nL
    A[k] = L[i]
    i = i + 1
    k = k + 1
while j < nR
    A[k] = R[j]
    j = j + 1
    k = k + 1
```

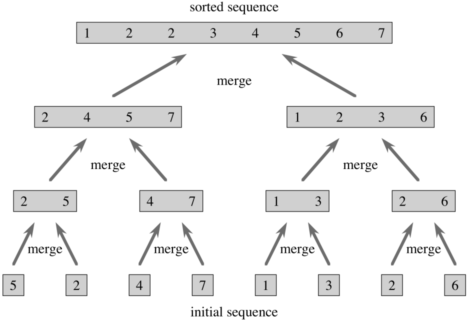
Mergesort

Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:



Mergesort

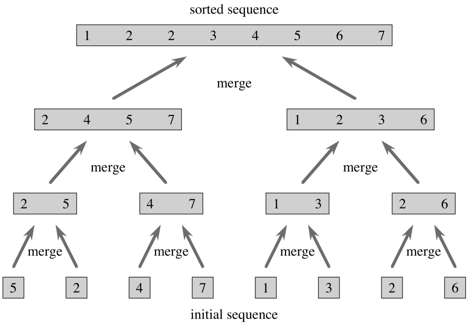
Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:



Tid:

Mergesort

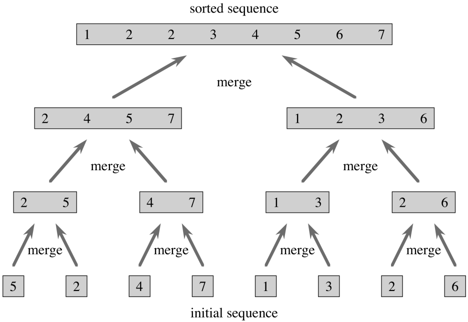
Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:



Tid: Hver merge bruger højst $c \cdot n_1$ tid, hvor n_1 er antal elementer der merges.

Mergesort

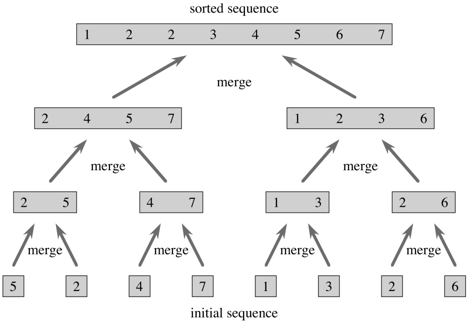
Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:



Tid: Hver merge bruger højst $c \cdot n_1$ tid, hvor n_1 er antal elementer der merges. Så alle merge-operationer i ét lag bruger tilsammen højst $c \cdot (n_1 + n_2 + \dots) = c \cdot n$. Dette gælder alle lagene.

Mergesort

Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:



Tid: Hver merge bruger højst $c \cdot n_1$ tid, hvor n_1 er antal elementer der merges. Så alle merge-operationer i ét lag bruger tilsammen højst $c \cdot (n_1 + n_2 + \dots) = c \cdot n$. Dette gælder alle lagene. Der er i alt $\log_2 n$ lag, så den samlede tid er højst $c \cdot n \cdot \log_2 n$.

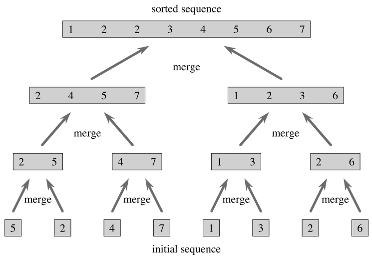
Mergesort

Hvorfor er der $\log_2 n$ merge-lag?

Mergesort

Hvorfor er der $\log_2 n$ merge-lag?

Antal sorterede lister efter k merge-lag (antag n er en potens af 2):

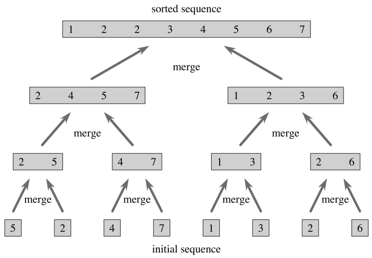


k	Antal lister
$\vdots$	$\vdots$
k	$n/2^k$
$\vdots$	$\vdots$
3	$n/2^3$
2	$n/2^2$
1	$n/2$
0	n

Mergesort

Hvorfor er der $\log_2 n$ merge-lag?

Antal sorterede lister efter k merge-lag (antag n er en potens af 2):



k	Antal lister
$\vdots$	$\vdots$
k	$n/2^k$
$\vdots$	$\vdots$
3	$n/2^3$
2	$n/2^2$
1	$n/2$
0	n

Algoritmen stopper når der er én sorteret liste:

$$n/2^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = 2^k \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 n = k$$

Mergesort

Hvis n ikke er en potens af 2?

Mergesort

Hvis n ikke er en potens af 2?

Algoritmen merger så i hvert lag så mange par, den kan, og der bliver evt. én liste som ikke merges (denne er med som liste på næste lag).

F.eks. bliver 12 lister bliver til 6 lister mens 13 $(= 12 + 1)$ lister til 7 $(= 6 + 1)$ lister.

Mergesort

Hvis n ikke er en potens af 2?

Algoritmen merger så i hvert lag så mange par, den kan, og der bliver evt. én liste som ikke merges (denne er med som liste på næste lag).

F.eks. bliver 12 lister bliver til 6 lister mens 13 $(= 12 + 1)$ lister til 7 $(= 6 + 1)$ lister.

Generelt: Hvis der er x lister før et merge-lag, er der $\lceil x/2 \rceil$ lister efter.

Mergesort

Hvis n ikke er en potens af 2?

Algoritmen merger så i hvert lag så mange par, den kan, og der bliver evt. én liste som ikke merges (denne er med som liste på næste lag).

F.eks. bliver 12 lister bliver til 6 lister mens 13 $(= 12 + 1)$ lister til 7 $(= 6 + 1)$ lister.

Generelt: Hvis der er x lister før et merge-lag, er der $\lceil x/2 \rceil$ lister efter.

Se på to input størrelse n_1 og n_2, med $n_1 \leq n_2$. Da $\lceil x/2 \rceil$ er en voksende funktion af x, kan antallet af lister i hvert lag ikke være mindre for n_2 end for n_1. Derfor kan antallet af lag (før algoritmen når ned på én liste) ikke være mindre for n_2 end for n_1.

Mergesort

Hvis n ikke er en potens af 2?

Algoritmen merger så i hvert lag så mange par, den kan, og der bliver evt. én liste som ikke merges (denne er med som liste på næste lag).

F.eks. bliver 12 lister bliver til 6 lister mens 13 $(= 12 + 1)$ lister til 7 $(= 6 + 1)$ lister.

Generelt: Hvis der er x lister før et merge-lag, er der $\lceil x/2 \rceil$ lister efter.

Se på to input størrelse n_1 og n_2, med $n_1 \leq n_2$. Da $\lceil x/2 \rceil$ er en voksende funktion af x, kan antallet af lister i hvert lag ikke være mindre for n_2 end for n_1. Derfor kan antallet af lag (før algoritmen når ned på én liste) ikke være mindre for n_2 end for n_1.

Sæt n_2 til mindste potens af to, som er større end eller lig n_1. Der er præcis $\log_2 n_2$ lag for n_2, og dermed højst så mange lag for n_1.

Så der er $\lceil \log_2 n \rceil$ lag for generelt n.

n	7	$8 = 2^3$	9	10	11	12	13	14	15	$16 = 2^4$	17
$\log_2(n)$	2.807	3	3.169	3.321	3.459	3.584	3.700	3.807	3.906	4	4.087
Antal lag	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5

Mergesort

Mergesort som pseudo-kode, i en variant formuleret med rekursion:

```
MERGE-SORT(A, p, r)
if p ≥ r                              // zero or one element?
    return
q = ⌊(p + r)/2⌋                       // midpoint of A[p : r]
MERGE-SORT(A, p, q)                   // recursively sort A[p : q]
MERGE-SORT(A, q + 1, r)               // recursively sort A[q + 1 : r]
// Merge A[p : q] and A[q + 1 : r] into A[p : r].
MERGE(A, p, q, r)
```

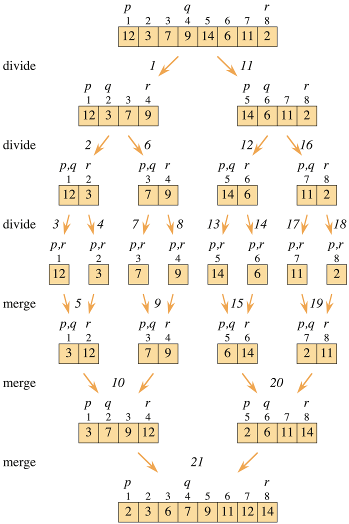
Et kald $\text{Merge-Sort}(A,p,r)$ har til opgave at stille elementerne i $A[p \ldots r]$ i sorteret orden.

Første kald er $\text{Merge-Sort}(A,1,n)$, som har til opgave at sortere hele A.

Et kald $\text{Merge-Sort}(A,p,q,r)$ merger de to sorterede del-arrays/lister $A[p \ldots q]$ og $A[q+1 \ldots r]$ sammen til $A[p \ldots r]$.

Mergesort

Eksempel på kørsel:



Quicksort

Mergesort:

- Del input op i to dele X og Y (trivielt)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Merge de to sorterede dele til én sorteret del (reelt arbejde)

Basistilfælde: $n \leq 1$ (allerede sorteret, gør intet)

Quicksort

Mergesort:

- Del input op i to dele X og Y (trivielt)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Merge de to sorterede dele til én sorteret del (reelt arbejde)

Basistilfælde: $n \leq 1$ (allerede sorteret, gør intet)

Quicksort:

- Del input op i to dele X og Y så $X \leq Y$ (reelt arbejde)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Returner X efterfulgt af Y (trivielt)

Basistilfælde: $n \leq 1$ (allerede sorteret, gør intet)

[Hoare, 1960]

Quicksort

Som pseudo-kode:

```
QUICKSORT(A, p, r)
if p < r
    // Partition the subarray around the pivot, which ends up in A[q].
    q = PARTITION(A, p, r)
    QUICKSORT(A, p, q − 1)  // recursively sort the low side
    QUICKSORT(A, q + 1, r)  // recursively sort the high side
```

Quicksort

Som pseudo-kode:

```
QUICKSORT(A, p, r)
if p < r
    // Partition the subarray around the pivot, which ends up in A[q].
    q = PARTITION(A, p, r)
    QUICKSORT(A, p, q - 1)  // recursively sort the low side
    QUICKSORT(A, q + 1, r)  // recursively sort the high side
```

Et kald $\text{Quicksort}(A,p,r)$ har til opgave at stille elementerne i $A[p \ldots r]$ i sorteret orden.

Første kald er $\text{Quicksort}(A,1,n)$, som har til opgave at sortere hele A.

Et kald $\text{Partition}(A,p,r)$ vælger et element $x \in A$ og opdeler $A[p \ldots r]$ således at:

$$A[q] = x \qquad A[p \ldots q-1] \leq x \qquad A[q+1 \ldots r] > x$$

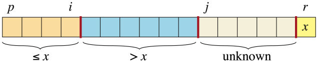
Partition

Hvordan lave PARTITION?

Partition

Hvordan lave PARTITION?

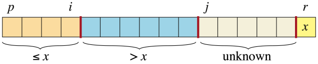
Idé: Vælg et element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del). Opbyg de to dele under et gennemløb af array ud fra flg. princip:



Partition

Hvordan lave PARTITION?

Idé: Vælg et element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del). Opbyg de to dele under et gennemløb af array ud fra flg. princip:

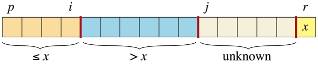


Hvordan tage et skridt under gennemløb?

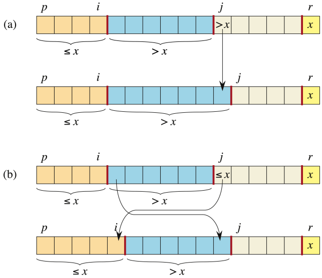
Partition

Hvordan lave PARTITION?

Idé: Vælg et element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del). Opbyg de to dele under et gennemløb af array ud fra flg. princip:

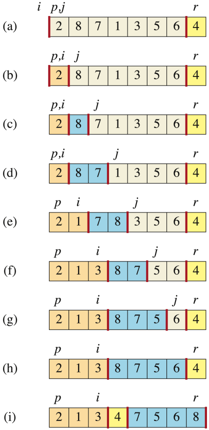


Hvordan tage et skridt under gennemløb?



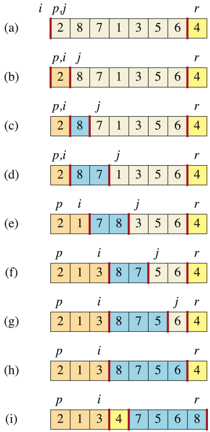
Partition

Et eksempel på gennemløb:



Partition

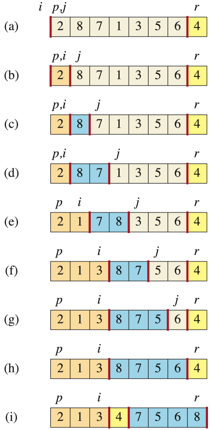
Et eksempel på gennemløb:



Tid:

Partition

Et eksempel på gennemløb:

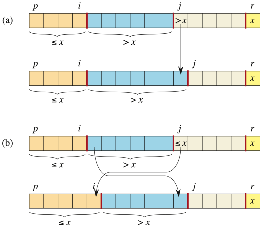


Tid: $O(n)$, hvor n er antal elementer i $A[p \ldots r]$.

Partition

Som pseudo-kode:

```
PARTITION(A, p, r)
x = A[r]                           // the pivot
i = p − 1                          // highest index into the low side
for j = p to r − 1                 // process each element other than the pivot
    if A[j] ≤ x                    // does this element belong on the low side?
        i = i + 1                  // index of a new slot in the low side
        exchange A[i] with A[j]    // put this element there
exchange A[i + 1] with A[r]        // pivot goes just to the right of the low side
return i + 1                       // new index of the pivot
```



Quicksort køretid

Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

To ekstremer af størrelser på rekursive kald:

- Helt ubalanceret: 0 og $n-1$
- Helt balanceret: $\lceil (n-1)/2 \rceil$ og $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$

Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

To ekstremer af størrelser på rekursive kald:

- Helt ubalanceret: 0 og $n - 1$
- Helt balanceret: $\lceil (n-1)/2 \rceil$ og $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$

- Hvis alle partitions er helt balancerede: $O(n \log n)$ (ca. samme analyse som for Mergesort).
- Hvis alle partitions er helt ubalancerede: $O(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1) = O(n^2)$.

Man kan vise at dette er henholdsvis best case og worst case for Quicksort.

Quicksort køretid

- I praksis: $O(n \log n)$ for næsten alle input.
- Dog: sorteret input giver $\Theta(n^2)$ for ovenstående valg af opdelingselement x i partition (brug *ikke* det valg i praksis).
- Mere robuste valg af opdelingselement x: enten som midterelementet, som medianen af flere elementer, som et tilfældigt element, eller som medianen af flere tilfældigt valgte elementer.
- Quicksort er *inplace*: bruger ikke mere plads end input-array'et.
- Kode er meget effektiv i praksis. En godt implementeret Quicksort er ofte bedste all-round sorteringsalgoritme (og valgt i mange biblioteker, f.eks. Java og C++/STL).

Heapsort

En Heap er:

Heapsort

En Heap er:

1. et binært træ
2. med heap-orden
3. og heap-facon
4. udlagt i et array

Heapsort

En Heap er:

1. et binært træ
2. med heap-orden
3. og heap-facon
4. udlagt i et array

(Note: “heap” bruges også om et hukommelsesområde brugt til allokering af objekter under et programs udførsel. De to anvendelser er urelaterede.)

[Williams, 1964]

1) Binært træ

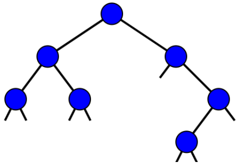
Et binært træ er enten

- det tomme træ

eller

- en knude v (evt. med indhold af data) samt to undertræer (et højre og et venstre).

Visualisering:



1) Binært træ

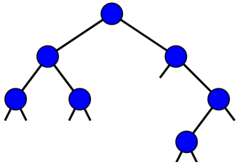
Et binært træ er enten

- det tomme træ

eller

- en knude v (evt. med indhold af data) samt to undertræer (et højre og et venstre).

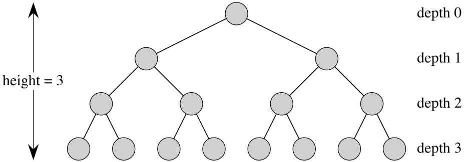
Visualisering:



Knuden v kaldes også rod for træet. Roden af et (ikke-tomt) undertræ af v kaldes for et barn af v, og v kaldes dennes forælder. Hvis begge v's undetræer er tomme, kaldes v et blad. Stregerne mellem børn og forældre kaldes for kanter.

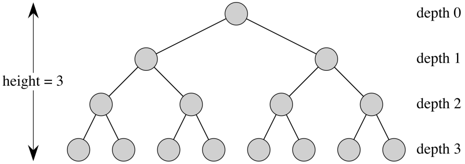
1) Binært træ

- Dybde af knude = antal kanter til rod
- Højde af knude = max antal kanter til blad
- Højde af træ = højde af dets rod
- Fuldt (complete) binært træ = træ hvor alle lag er helt fyldte.



1) Binært træ

- Dybde af knude = antal kanter til rod
- Højde af knude = max antal kanter til blad
- Højde af træ = højde af dets rod
- Fuldt (complete) binært træ = træ hvor alle lag er helt fyldte.



Et fuldt binært træ af højde h har

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^h = \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

knuder (formel A.5 side 1147), heraf 2^h blade.

2) Heaporden

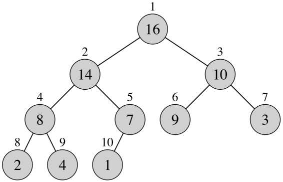
Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-heapordnet hvis det for alle par af knuder v og u, hvor v er forældre til u, gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$

2) Heaporden

Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-heapordnet hvis det for alle par af knuder v og u, hvor v er forældre til u, gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$



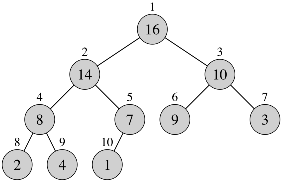
(a)

NB: dubletter er tilladt (ikke vist).

2) Heaporden

Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-heapordnet hvis det for alle par af knuder v og u, hvor v er forældre til u, gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$



(a)

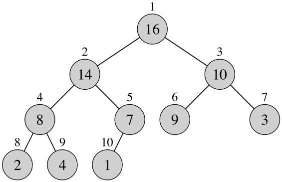
NB: dubletter er tilladt (ikke vist).

Specielt gælder at roden indeholder den største nøgle i hele heapen.

2) Heaporden

Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-heapordnet hvis det for alle par af knuder v og u, hvor v er forældre til u, gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$



(a)

NB: dubletter er tilladt (ikke vist).

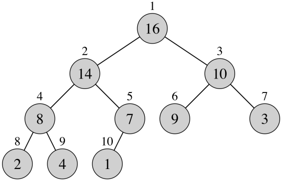
Specielt gælder at roden indeholder den største nøgle i hele heapen.

Det er min-heapordnet hvis der gælder

$$\text{nøgle i } v \leq \text{nøgle i } u$$

3) Heapfacon

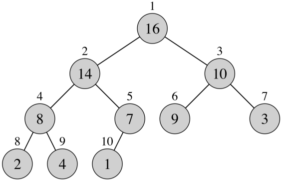
Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



(a)

3) Heapfacon

Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



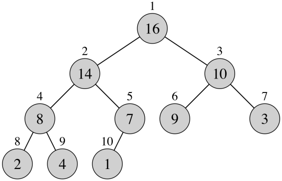
(a)

For et træ af heapfacon af højde h med n knuder:

$$n > \text{antal knuder i fuldt træ af højde } h - 1 = 2^h - 1$$

3) Heapfacon

Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



(a)

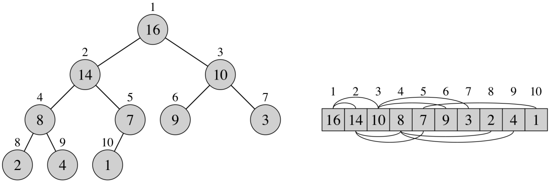
For et træ af heapfacon af højde h med n knuder:

$$n > \text{antal knuder i fuldt træ af højde } h-1 = 2^h - 1$$

$$n > 2^h - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 > 2^h \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(n+1) > h$$

4) Heap udlagt i et array

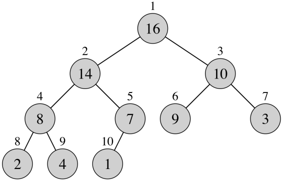
Et binært træ i heapfacon kan naturligt udlægges i et array ved at tildele array-indekser til knuder ved et top-down, venstre-til-højre gennemløb af træets lag:



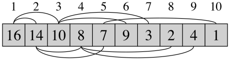
(a) (b)

4) Heap udlagt i et array

Et binært træ i heapfacon kan naturligt udlægges i et array ved at tildele array-indekser til knuder ved et top-down, venstre-til-højre gennemløb af træets lag:



(a)



(b)

Navigering mellem børn og forældre i array-versionen kan udføres ved simple beregninger: Knuden på plads i har

- Forælder på plads $\lfloor i/2 \rfloor$
- Børn på plads $2i$ og $2i+1$

(Se figur ovenfor. Formelt bevis til eksaminatorier.)

Operationer på en heap

Vi ønsker at lave følgende operationer på en heap:

- MAX-HEAPIFY: Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens undertræ til at overholde heap-orden.
- BUILD-MAX-HEAP: Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

[Navnene ovenfor er for en max-heap. For en min-heap findes de samme operationer med "min-" i stedet for "max-" i navnet.]

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning:

Max-Heapify

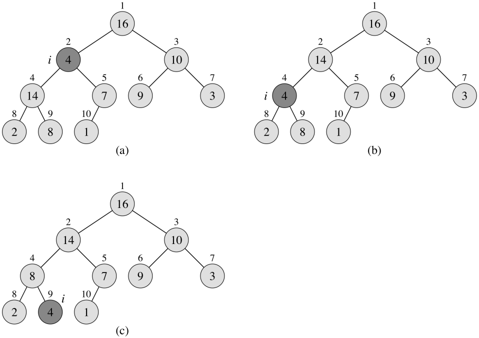
Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning: byt nøgle med barnet med den største nøgle, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

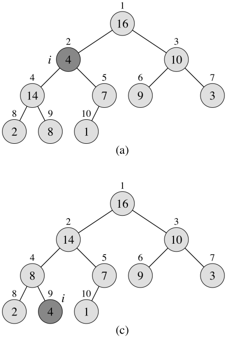
- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning: byt nøgle med barnet med den største nøgle, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.



Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning: byt nøgle med barnet med den største nøgle, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.

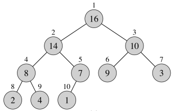


Tid: O(højde af knude).

Max-Heapify

Som pseudo-kode (med indarbejdet check for at man ikke kigger "for langt" i arrayet, dvs. længere end plads n):

```
MAX-HEAPIFY(A, i, n)
  l = LEFT(i)
  r = RIGHT(i)
  if l ≤ n and A[l] > A[i]
      largest = l
  else largest = i
  if r ≤ n and A[r] > A[largest]
      largest = r
  if largest ≠ i
      exchange A[i] with A[largest]
      MAX-HEAPIFY(A, largest, n)
```



(a)

Build-Heap

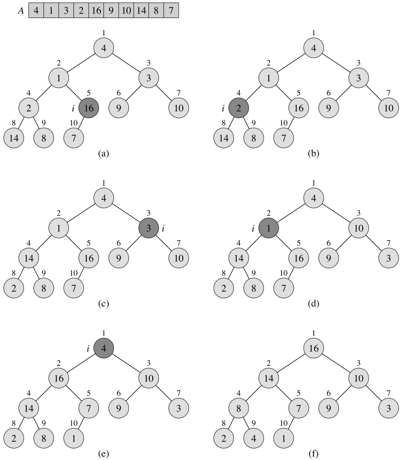
Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

- Ide: arranger elementerne i heap-facon, bring derefter træet i heap-orden nedefra og op.
- Observation: et træ af størrelse én overholder altid heaporder.

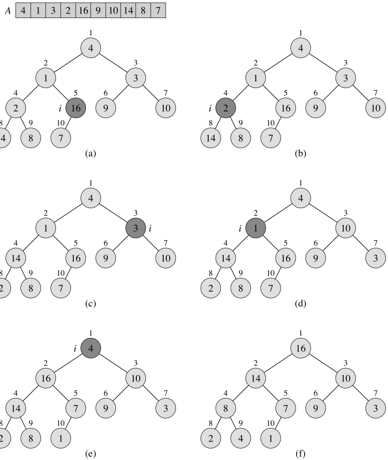
Build-Heap

Lav *n* input elementer (uordnede) til en heap.

- Ide: arranger elementerne i heap-facon, bring derefter træet i heap-orden nedefra og op.
- Observation: et træ af størrelse én overholder altid heaporder.

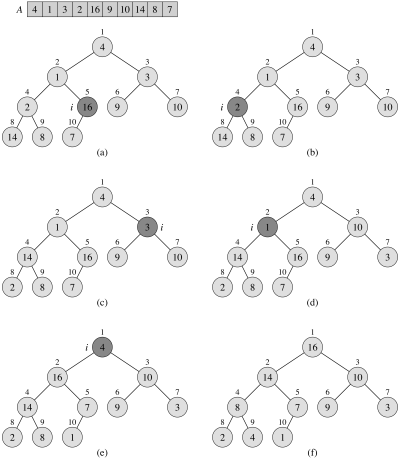


Build-Heap



Tid:

Build-Heap

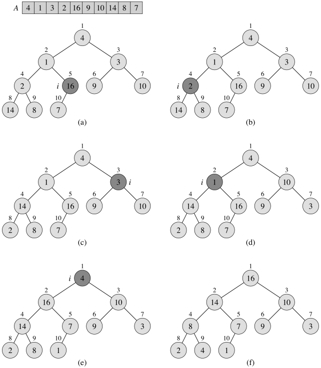


Tid: $O(n \log_2 n)$ klart. Bedre analyse giver $O(n)$.

Build-Heap

Som pseudo-kode:

$$
\begin{array}{l}
\textsc{Build-Max-Heap}(A, n) \\
\quad \textbf{for } i = \lfloor n/2 \rfloor \textbf{ downto } 1 \\
\qquad \textsc{Max-Heapify}(A, i, n)
\end{array}
$$



Heapsort

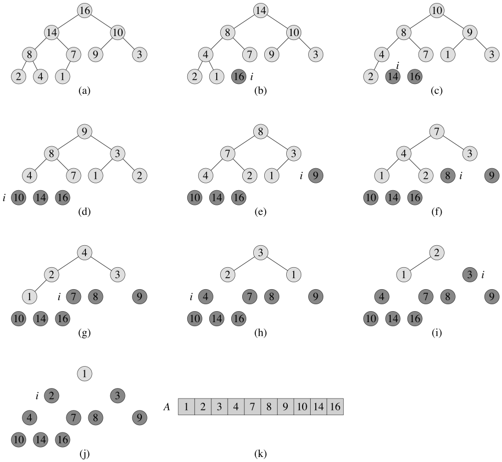
Heapsort

En form for selectionsort hvor der bruges en heap til hele tiden at udtage det største tilbageværende element:

byg en heap
gentag til heap er tom:
  udtag rod (største element i heapen)
  sæt sidste element op som ny rod
  genskab heap-struktur ved $\textsc{Max-Heapify}$ på ny rod.

Heapsort

Eksempel:



Heapsort

Som pseudo-kode:

```
HEAPSORT(A, n)
  BUILD-MAX-HEAP(A, n)
  for i = n downto 2
      exchange A[1] with A[i]
      MAX-HEAPIFY(A, 1, i − 1)
```

Heapsort

Som pseudo-kode:

```
HEAPSORT(A, n)
  BUILD-MAX-HEAP(A, n)
  for i = n downto 2
      exchange A[1] with A[i]
      MAX-HEAPIFY(A, 1, i − 1)
```

Tid: $O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$

Tre $n \log n$ sorteringsalgoritmer

	Worstcase	Inplace
QuickSort		$\surd$
MergeSort	$\surd$	
HeapSort	$\surd$	$\surd$

Heapsort kører dog langsommere end Mergesort og Quicksort pga. ineffektiv brug af hukommelse (random access).

Introsort [Musser, 1997]: brug Quicksort, men skift under rekursionen til heapsort hvis rekursionen bliver for dyb. Dette giver en inplace, worst case $O(n \log n)$ algoritme, med god køretid i praksis (dette er sorteringsalgoritmen i standardbiblioteket STL for C++).