Eksaminatorie-timer

DM507: Algoritmer og datastrukturer

T510040101: Diskret Matematik, Algoritmer og Datastrukturer.

Løsninger

Uge 5 2021

Del A

Opgave 1 – Cormen et al. problem 1.1

Bestem den største størrelse n af et problem, der kan blice løst på tid t, når det tager $f(n)$ nanosekunder at løse problemet. Udfyld følgende tabel:

	1 sekund	1 dag	1 år
$\lg n$	2^{10^9}	$2^{24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9}$	$2^{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9}$
$\sqrt{n}$	10^{18}	$(24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9)^2$	$(365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9)^2$
n	10^9	$24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9$	$365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9$
$n\lg n$	$3.962007773\cdot 10^7$	$2.110372740\cdot 10^{12}$	$5.666509343\cdot 10^{16}$
n^2	$\sqrt{10^9}$	$\sqrt{24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9}$	$\sqrt{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9}$
n^3	1000	44208	$\sqrt[3]{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9}$
2^n	29	46	54
$n!$	12	16	18

Essensen er at forstå at man kan løse meget større problemer hvis ens køretid f.eks. er logaritmisk fremfor eksponentiel.

Observér følgende:

$$
\begin{aligned}
1 \text{ sekund} &= 10^9 \text{ ns}\\
1 \text{ dag} &= 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9 \text{ ns}\\
1 \text{ år} &= 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9 \text{ ns}
\end{aligned}
$$

Heraf følger:

- $f(n) = \lg n$
  - 1 sekund: $\lg n = 10^9 \Leftrightarrow n = 2^{10^9}$
  - 1 dag: $\lg n = 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9 \Leftrightarrow n = 2^{24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9}$
  - 1 år: $\lg n = 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9 \Leftrightarrow n = 2^{365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9}$
- $f(n) = \sqrt{n}$
  - 1 sekund: $\sqrt{n} = 10^9 \Rightarrow n = (10^9)^2 = 10^{18}$
  - 1 dag: $\sqrt{n} = 24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9 \Rightarrow n = (24\cdot 60\cdot 60\cdot 10^9)^2$

- 1 år: $\sqrt{n} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Rightarrow n = (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9)^2$

- $f(n) = n$
  - 1 sekund: $n = 10^9$
  - 1 dag: $n = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9$
  - 1 år: $n = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9$
- $f(n) = n \lg n$ (løst vha. Maple/Wolfram Alpha)
  - 1 sekund: $n \lg n = 10^9 \Leftrightarrow n = 3.962007773 \cdot 10^7$
  - 1 dag: $n \lg n = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Leftrightarrow n = 2.110372740 \cdot 10^{12}$
  - 1 år: $n \lg n = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Leftrightarrow n = 6.411368624 \cdot 10^{16}$
- $f(n) = n^2$
  - 1 sekund: $n^2 = 10^9 \Rightarrow n = \sqrt{10^9}$
  - 1 dag: $n^2 = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Rightarrow n = \sqrt{24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9}$
  - 1 år: $n^2 = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Rightarrow n = \sqrt{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9}$
- $f(n) = n^3$
  - 1 sekund: $n^3 = 10^9 \Rightarrow n = \sqrt[3]{10^9} = 1000$
  - 1 dag: $n^3 = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Rightarrow n = \sqrt[3]{24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9} \approx 44208$
  - 1 år: $n^3 = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Rightarrow n = \sqrt[3]{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9} \approx 10^6$
- $f(n) = 2^n$
  - 1 sekund: $2^n = 10^9 \Leftrightarrow n = \lg(10^9) \approx 29$
  - 1 dag: $2^n = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Leftrightarrow n = \lg(24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9) \approx 46$
  - 1 år: $2^n = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Leftrightarrow n = \lg(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9) \approx 54$
- $f(n) = n!$ (løst vha. *trial and error* - find det største n hvorved $n! < t$)
  - 1 sekund: $n! = 10^9 \Rightarrow n \approx 12$
  - 1 dag: $n! = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Rightarrow n \approx 16$
  - 1 år: $n! = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 10^9 \Rightarrow n \approx 18$

Opgave 2 – Brodals noter om puslespil, opgave 1

Vis at hvis alle brikker ikke står på deres korrekte pladser i starten, så kræves mindst $n/2$ ombytninger for at løse puslespillet.

Hvis alle brikker ikke står på deres korrekte plads, så skal alle pladser flyttes minumum én gang. I én ombytning kan man i best case flytte to brikker på plads på én gang. Altså, så skal der foretages mindst $n/2$ ombytninger.

Opgave 3 – Brodals noter om puslespil, opgave 2

Angiv et puslespil med 4 brikker og en optimal følge af ombytninger for det givne puslespil (en følge af ombytninger der indeholder det mindst mulige antal ombytninger), men hvor ikke alle ombytninger flytter mindst én brik til den korrekte plads.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Observér $n = 4$ og $k = 1$ (antal kredse). Det følger af **Sætning 1**, at det optimale antal ombytninger er $n - k = 3$. I ovenstående eksempel bruges det optimale antal ombytninger, men den første ombytning er ikke "grådig" (ingen brikker flyttes til deres korrekte plads).

Opgave 4

Se kode i `week_6/Shuffle.java`.

Opgave 5

Følgende er en algoritme, som løser problemet:

```
count(L)
  c = 0
  // Counts number of cycles.
  for each n in L
    if n != -1
      // Eliminate cycle by replacing number by -1.
      i = n
      while i != -1
        j = L[i]
        L[i] = -1
        i = j

      c = c + 1
  return c
```

Køretiden er lineær - altså køretiden er proportional med n. Man rører hvert element/index to gange.

Del B

Opgave 1 – Cormen et al. problem 1.1

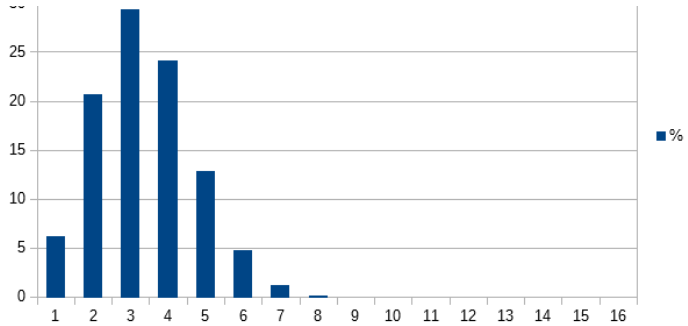
Svar skrevet i Opgave 1 fra Del A.

Opgave 2

Se Java implementering i mappen `week_6/Shuffle.java`.

Genereres 10000000 tilfældige list permutationer observeres følgende:

Cycles	# occurrences
1	625451
2	2075119
3	2945744
4	2419693
5	1292277
6	481588
7	129923
8	25835
9	3911
10	418
11	39
12	2
13	0
14	0
15	0
16	0



Det gennemsnitlige antal cykler er 3.3798579 hvilket er tæt på det forventede, som er $H_{16} \approx 3.38$ (16. harmoniske tal).