Disjoint Sets

Partition

En Partition (disjunkt opdeling) af en mængde S er en samling ikke-tomme delmængder A_i, $i = 1, \ldots, k$ som er disjunkte og tilsammen udgør S:

$$A_i \neq \emptyset \text{ for alle } i$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = S$$

Eksempel:

$\{a, b, e\}$, $\{f\}$, $\{c, d, g, h\}$ er en partition af $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

Disjoint Sets operationer

Disjunkte mængder (partition) som datastruktur? Følgende er en samling operationer, som har vist sig relevante i anvendelser (anvendelser senere i kurset):

MAKE-SET(x):

Opret $\{x\}$ som en mængde.

UNION(x, y):

Slå $\{a, b, c, \ldots, x\}$ og $\{h, i, j, \ldots, y\}$ sammen til $\{a, b, c, \ldots, x, h, i, j, \ldots, y\}$.

FIND-SET(x):

Returner en ID for mængden indeholdende x.

Disjoint Sets operationer

Disjunkte mængder (partition) som datastruktur? Følgende er en samling operationer, som har vist sig relevante i anvendelser (anvendelser senere i kurset):

MAKE-SET(x):

Opret $\{x\}$ som en mængde.

UNION(x, y):

Slå $\{a, b, c, \ldots, x\}$ og $\{h, i, j, \ldots, y\}$ sammen til $\{a, b, c, \ldots, x, h, i, j, \ldots, y\}$.

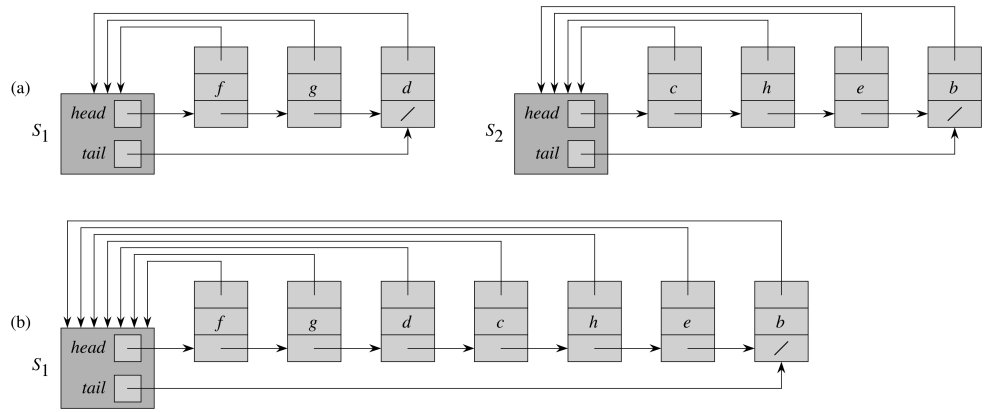
FIND-SET(x):

Returner en ID for mængden indeholdende x.

NB: Vi har ingen krav til ID'en. Skal blot være den samme for alle x i samme mængde, således at vi kan checke om to elementer x og y ligger i samme mængde.

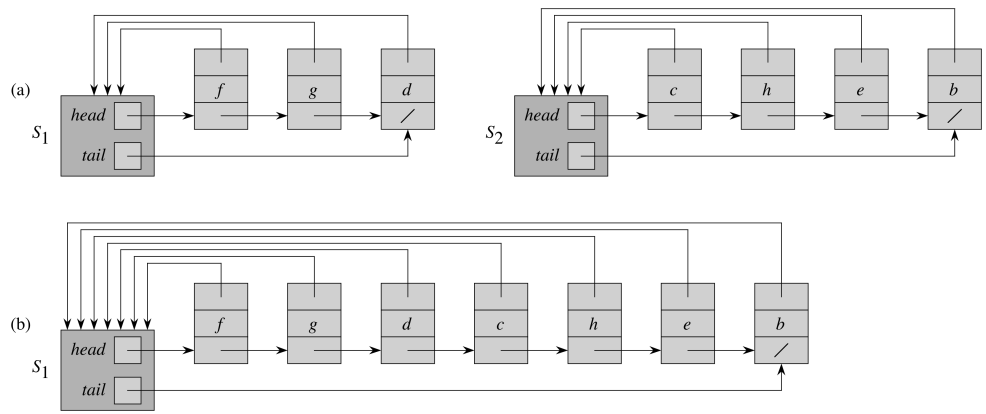
Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister

Hver mængde er en lænket liste af elementer, ID for mængde er første element i listen:



Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister

Hver mængde er en lænket liste af elementer, ID for mængde er første element i listen:



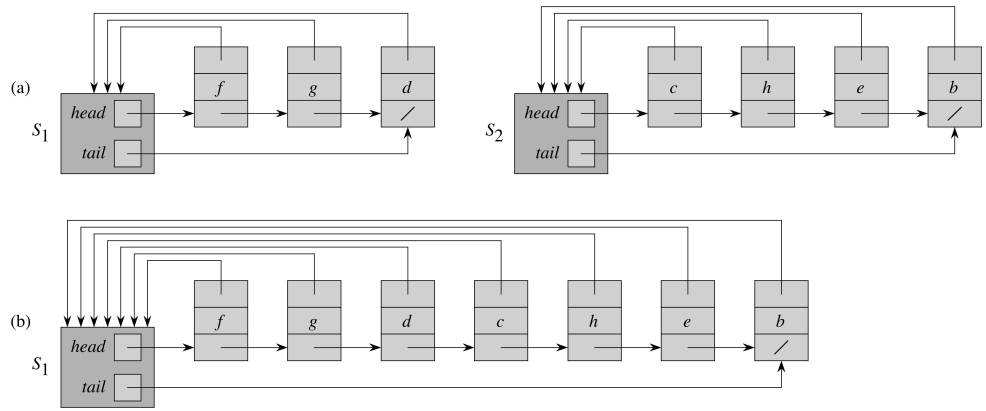
- FIND-SET(x): returner (via header-pointer) første element i listen.
- MAKE-SET(x): opret ny liste.
- UNION(x, y): slå lister sammen, behold én header, ændrer alle header-pointere i den anden liste.

Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister

Køretid (n er antal elementer, dvs. antal MAKE-SETs udført)?

Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister

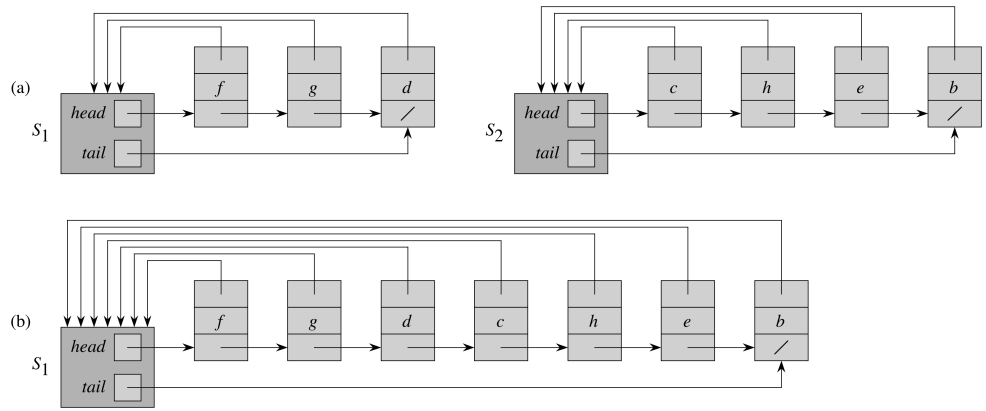
Køretid (n er antal elementer, dvs. antal MAKE-SETs udført)?



- FIND-SET(x): returner (via header-pointer) første element i listen: $O(1)$.
- MAKE-SET(x): opret ny liste: $O(1)$.
- UNION(x, y): slå lister sammen, behold én header, ændre alle header-pointere i den anden liste: $O(n)$.

Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister

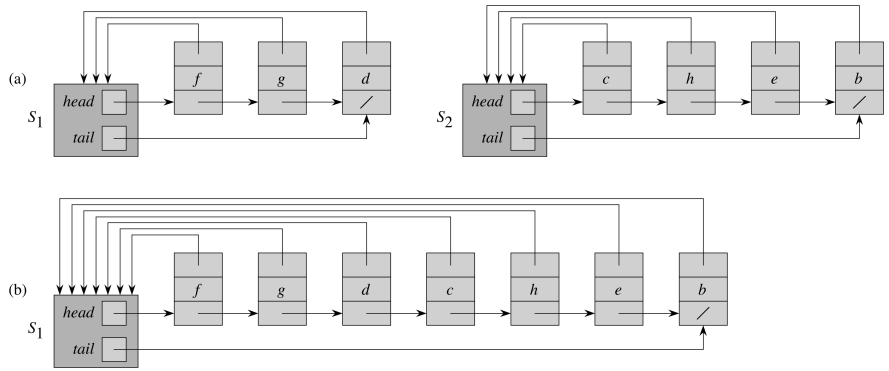
Køretid (n er antal elementer, dvs. antal MAKE-SETs udført)?



- FIND-SET(x): returner (via header-pointer) første element i listen: $O(1)$.
- MAKE-SET(x): opret ny liste: $O(1)$.
- UNION(x, y): slå lister sammen, behold én header, ændre alle header-pointere i den anden liste: $O(n)$.

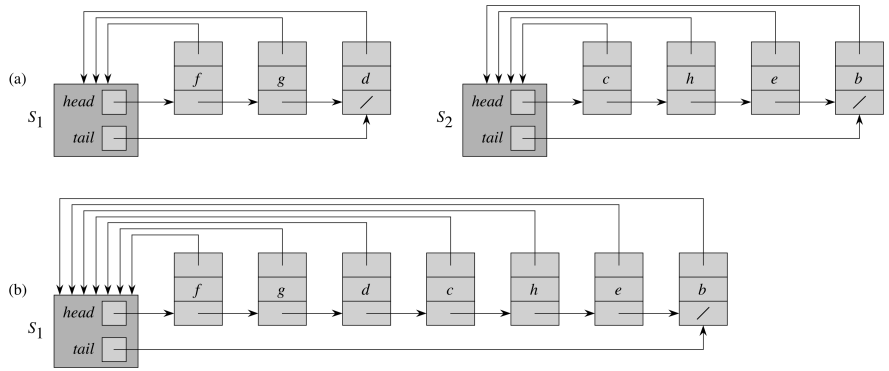
Naiv analyse: n MAKE-SET, op til $n-1$ UNION, og m FIND-SET koster $O(m+n^2)$.

Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister



- FIND-SET(x): returner (via header-pointer) første element i listen: $O(1)$.
- MAKE-SET(x): opret ny liste: $O(1)$.
- UNION(x, y): slå lister sammen, behold header af længste liste, ændre alle header-pointere i korteste liste: $O(n)$.

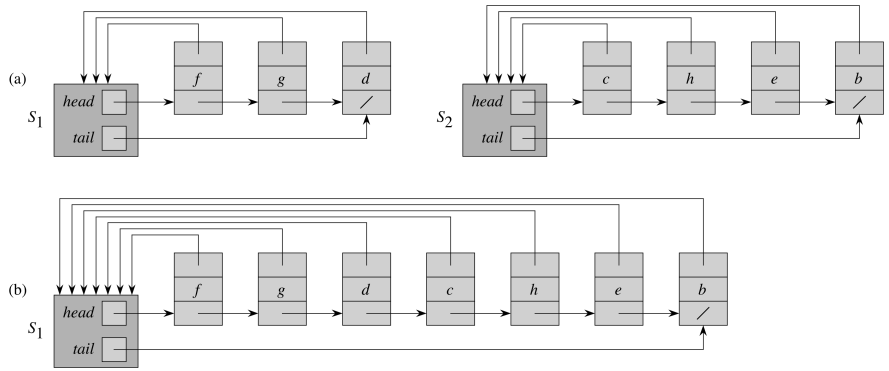
Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister



- FIND-SET(x): returner (via header-pointer) første element i listen: $O(1)$.
- MAKE-SET(x): opret ny liste: $O(1)$.
- UNION(x, y): slå lister sammen, behold header af længste liste, ændre alle header-pointere i korteste liste: $O(n)$.

Observér at nu gælder: en knude kan kun ændre sin header-pointer log n gange, da størrelsen af dens mængde hver gang vokser mindst en faktor to ($1 \cdot 2^k \leq n \Leftrightarrow k \leq \log n$).

Datastruktur for Disjoint Sets via lænkede lister



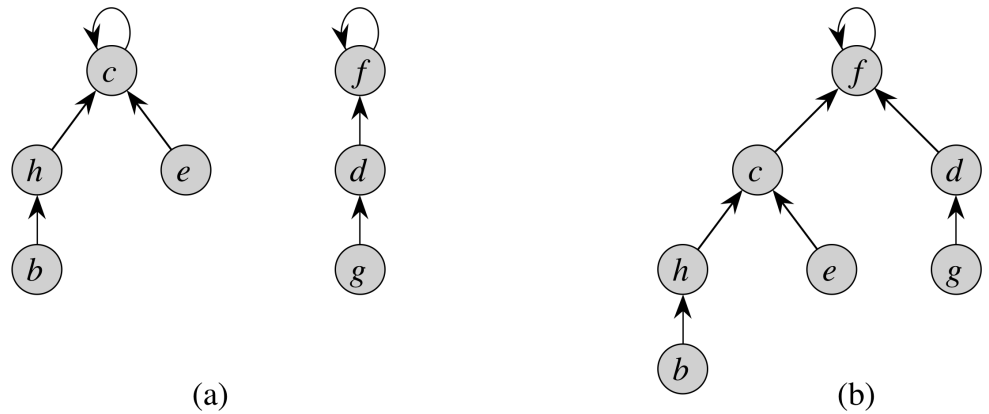
- FIND-SET(x): returner (via header-pointer) første element i listen: $O(1)$.
- MAKE-SET(x): opret ny liste: $O(1)$.
- UNION(x, y): slå lister sammen, behold header af længste liste, ændre alle header-pointere i korteste liste: $O(n)$.

Observér at nu gælder: en knude kan kun ændre sin header-pointer log n gange, da størrelsen af dens mængde hver gang vokser mindst en faktor to ($1 \cdot 2^k \leq n \Leftrightarrow k \leq \log n$).

Så bedre analyse: n MAKE-SET, op til $n-1$ UNION, og m FIND-SET koster $O(m + n \log n)$.

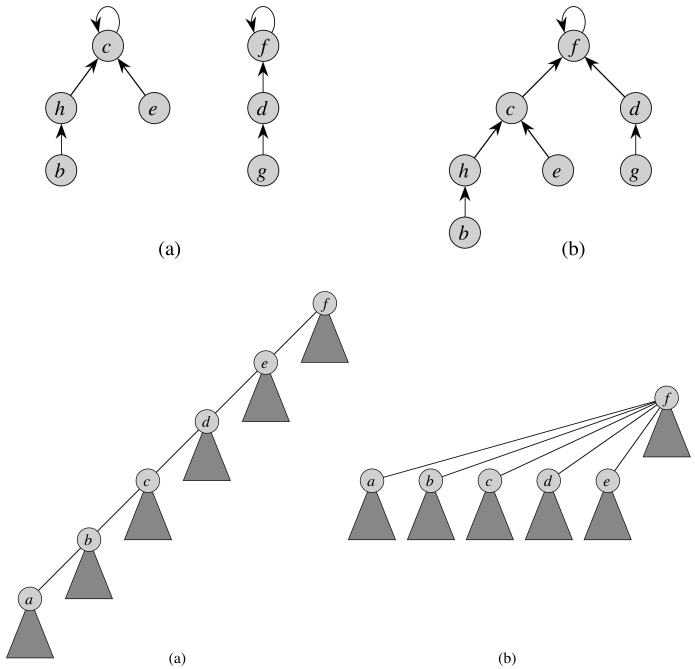
Datastruktur for Disjoint Sets via træer

Hver mængde er et træ med elementer i knuder, rod er ID for mængde:

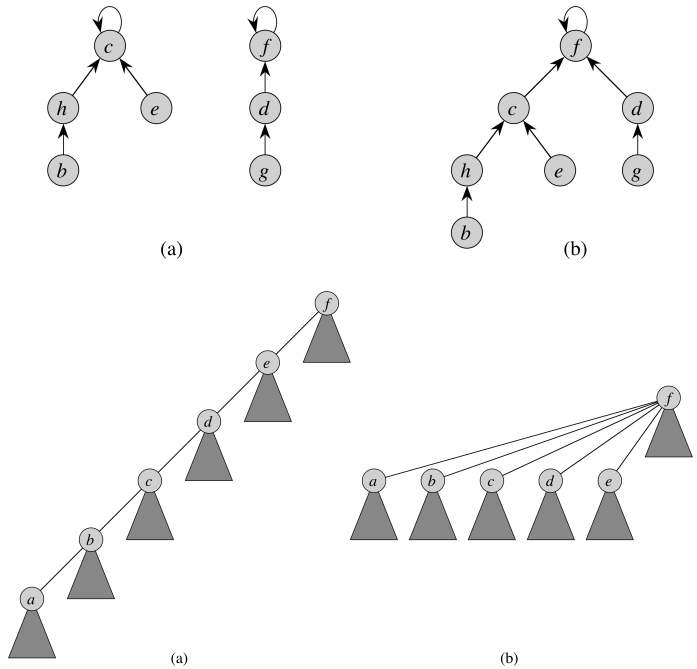


- FIND-SET(x): gå til rod.
- MAKE-SET(x): opret nyt træ.
- UNION(x, y): gør rod af ét træ til barn af andet træ.

Datastruktur for Disjoint Sets via træer



Datastruktur for Disjoint Sets via træer



Union by rank og *path compression* (se bog afsnit 19.3 [3. udgave: afsnit 21.3] eller koden nedenfor for definition) $\Rightarrow$ meget tæt på $O(m+n)$ tid. Mere præcist $O(m \cdot \alpha(n))$, hvor $\alpha(n)$ er en meget langsomt voksende funktion (defineret i afsnit 19.4, som ikke er pensum).

Analyse: i et senere kursus på datalogistudiet.

Datastruktur for Disjoint Sets via træer

Pseudokode (med union by rank og path compression) er simpel:

```
MAKE-SET(x)
  x.p = x
  x.rank = 0

UNION(x, y)
  LINK(FIND-SET(x), FIND-SET(y))

FIND-SET(x)
  if x ≠ x.p
      x.p = FIND-SET(x.p)
  return x.p

LINK(x, y)
  if x.rank > y.rank
      y.p = x
  else x.p = y
      // If equal ranks, choose y as parent and increment its rank.
      if x.rank == y.rank
          y.rank = y.rank + 1
```