Dynamisk programmering

Flere eksempler

Eksempel 1: Længste fælles delsekvens

Alfabet = mængde af tegn:

$\{a,b,c,\ldots,z\}$, $\{A,C,G,T\}$, $\{0,1\}$

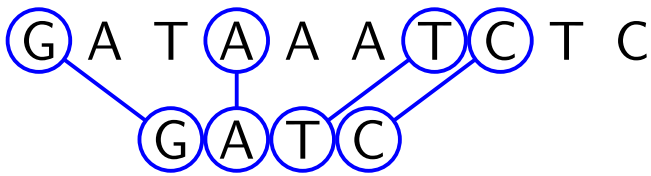
Streng = sekvens $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ af tegn fra et alfabet:

helloworld

GATAAATCTGGTCTTATTTCC

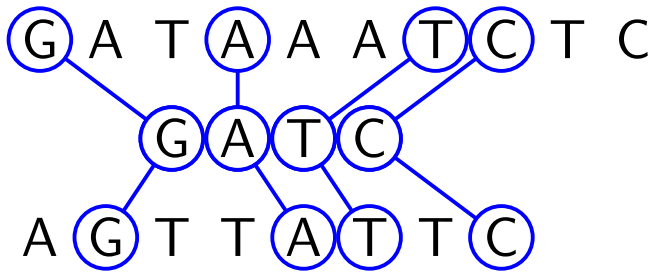
00101100101010001111

Delsekvens = delmængde af tegnene i streng, i uændret rækkefølge:

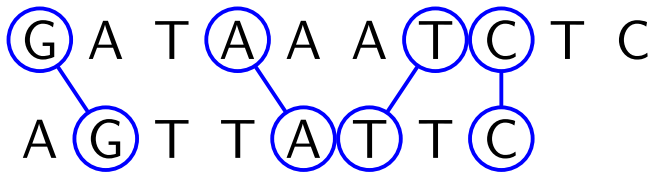


Længste fælles delsekvens

Fælles delsekvens for to strenge:



Eller blot:



Længste fælles delsekvens (Longest Common Subsequence, LCS):

For to strenge

$$X = x_1 x_2 x_3 \ldots x_m$$
$$Y = y_1 y_2 y_3 \ldots y_n$$

af længde m og n, find en længste fælles delsekvens for dem.

Længden af denne kan ses som et mål for similaritet mellem strenge (f.eks. dna-strenge).

Rekursiv løsning?

Vi vil arbejde på at lave en rekursiv løsning. Vi definerer derfor en størrelse for del-problemer:

- $X_i = x_1 x_2 x_3 \ldots x_i$ for $1 \leq i \leq m$.
- $Y_j = y_1 y_2 y_3 \ldots y_j$ for $1 \leq j \leq n$.
- X_0 og Y_0 er den tomme streng.
- lcs(i, j) er længden af længste fælles delsekvens af X_i og X_j.

Vi vil gerne finde lcs(m, n).

Mere generelt: Vi søger en rekursiv formel for lcs(i, j).

Basistilfælde: Det er klart at lcs(0, j) = lcs(i, 0) = 0.

Optimale delprobleme r I

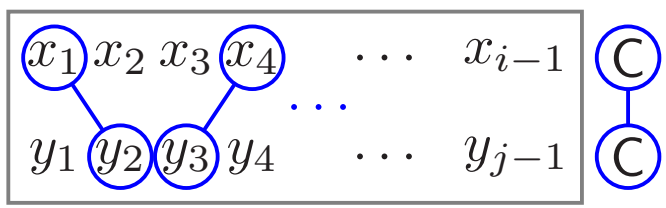
Formel for lcs(i, j): Case I: $x_i = y_j$

Observation: en fælles delsekvens Z for X_i og Y_j af længde k består af

- Et sidste tegn z_k.
- En streng $Z' = z_1 z_2 z_3 \ldots z_{k-1}$ af længde $k-1$, som må være en fælles delsekvens af X_{i-1} og Y_{j-1} (tegnene i Z skal komme i samme rækkefølge som i X og Y, så kun sidste tegn i Z har mulighed for at være x_i og y_j).

Observation (optimale delproblemer) for Case I:

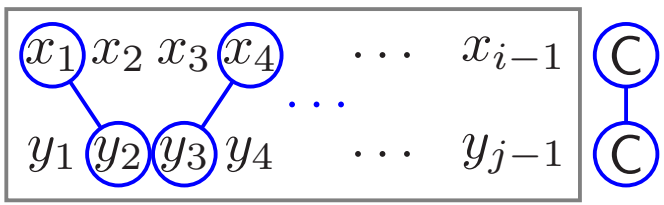
Hvis Z er en længste fælles delsekvens for for X_i og Y_j, må Z' være en længste fælles delsekvens af X_{i-1} og Y_{j-1}. For hvis der fandtes en længere fælles delsekvens for X_{i-1} og Y_{j-1}, kunne den tilføjes tegnet x_i $(= y_j)$ og blive en længere fælles delsekvens for X_i og Y_j.



Optimale delproblemer I

Af observationen haves i Case I ($x_i = y_j$):

- lcs(i, j) = lcs(i − 1, j − 1) + 1
- En længste fælles delsekvens for X_{i-1} og Y_{j-1} tilføjet tegnet x_i (= y_j) er en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j.



Optimale delprobleme r II

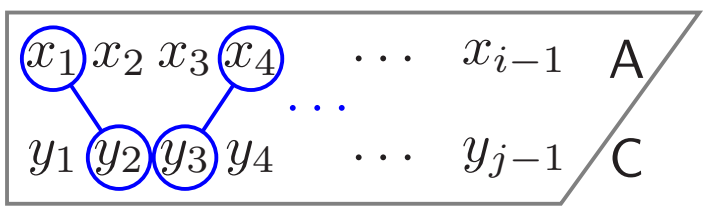
Formel for lcs(i, j): Case II: $x_i \neq y_j$

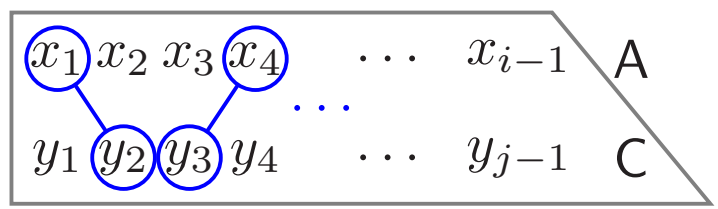
Observation: en fælles delsekvens $Z = z_1 z_2 z_3 \ldots z_k$ for X_i og Y_j kan ikke have z_k værende en parring af x_i og y_j (da disse er forskellige).

Så Z må være en fælles delsekvens for *enten* X_{i-1} og Y_j *eller* for X_i og Y_{j-1} (eller evt. begge).

Observation (optimale delproblemer) for Case II:

> Hvis Z er en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j, må den være en længste fælles delsekvens for enten X_{i-1} og Y_j eller for X_i og Y_{j-1} (eller evt. begge). For hvis der fandtes en længere fælles delsekvens for enten X_{i-1} og Y_j eller for X_i og Y_{j-1}, ville denne også være en længere fælles delsekvens for X_i og Y_j.





Optimale delproblemer II

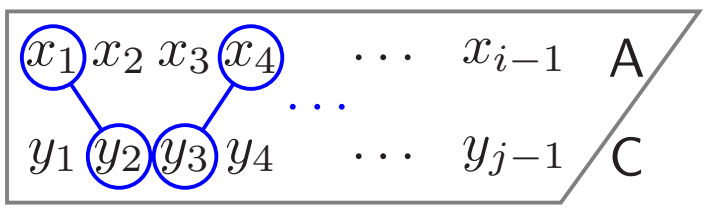
Lad T_1 være en længste fælles delsekvens for X_{i-1} og Y_j, og lad T_2 være en længste fælles delsekvens for X_i og Y_{j-1}.

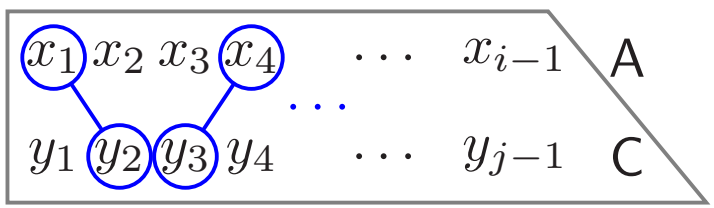
Af observationen i Case II ($x_i \neq y_j$) haves, at blandt T_1 og T_2 er der (mindst) én, som er en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j.

Ingen af T_1 og T_2 kan være længere end den længste fælles delsekvens for X_i og Y_j (da de begge er delsekvenser af X_i og Y_j).

Så af observationen haves i Case II ($x_i \neq y_j$):

- $\mathrm{lcs}(i, j) = \max(\mathrm{lcs}(i-1, j), \mathrm{lcs}(i, j-1))$
- Hvis $\mathrm{lcs}(i-1, j) \geq \mathrm{lcs}(i, j-1)$, er en længste fælles delsekvens for X_{i-1} og Y_j også en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j. Et symmetrisk udsagn gælder for "$\leq$" og X_i og Y_{j-1}.





Rekursiv formel for lcs(i, j)

Alt i alt har vi fundet flg. rekursive formel for lcs(i, j):

$$\text{lcs}(\text{i},\text{j}) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(\text{i}-1,\text{j}-1)+1 & \text{if } i,j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(\text{i}-1,\text{j}),\text{lcs}(\text{i},\text{j}-1)) & \text{if } i,j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Den giver anledning til en naturlig, simpel rekursiv algoritme.

MEN: det er nemt at se at der er gentagelser blandt delproblemers delproblemer.

Så samme delproblemer bliver gentagne gange beregnet forskellige steder i rekursionstræet, og køretiden bliver meget dårlig.

Kan evt. løses med memoization: hav en tabel med plads til svaret på alle de mulige delproblemer lcs(i, j), og gem svaret, når det er beregnet første gang. Siden, slå det bare op.

Dynamisk programmering: udfyld i stedet direkte denne tabel bottom-up på struktureret måde.

Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over lcs(i, j) bottom-up på struktureret måde.

i \ j	0	1	2	·	·	·	n
0							
1							
2							
·							
·							
m							

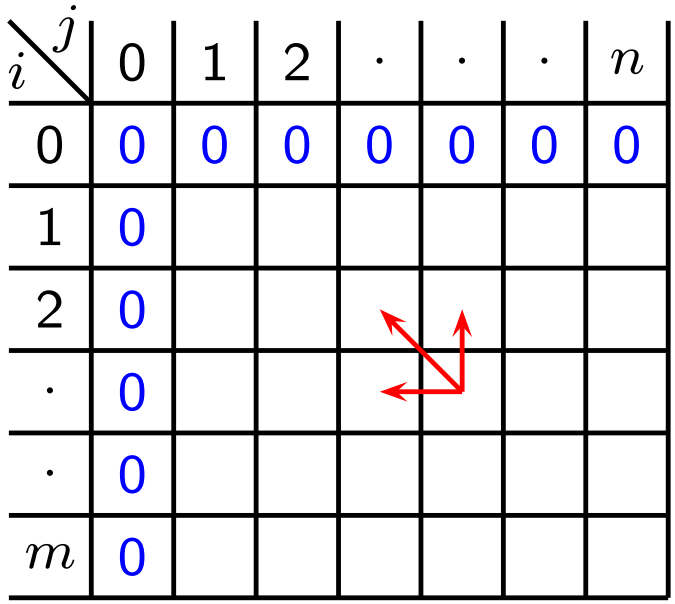
i \ j	0	1	2	·	·	·	n
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
m	0						

i \ j	0	1	2	·	·
0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
·	0				
·	0				
m	0				

$$\text{lcs}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i-1, j-1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i-1, j), \text{lcs}(i, j-1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Køretid

Dynamisk programmering: udfyld tabel over lcs(i, j) bottom-up på struktureret måde.



Tabelstørrelse: mn

Udfyld tabelindgang: O(max størrelse af røde graf) $= O(1)$.

Tid i alt: O(produktet af de to) $= O(mn)$.

Find en konkret løsning

lcs(m, n) er længden af en længste fælles delsekvens for $X = X_m$ og $Y = Y_n$.

Hvis vi gerne vil finde en konkret fælles delsekvens af denne længde: Gem for hvert felt i tabellen hvilken af de tre røde pile som gav lcs(i, j)-værdien i dette felt.

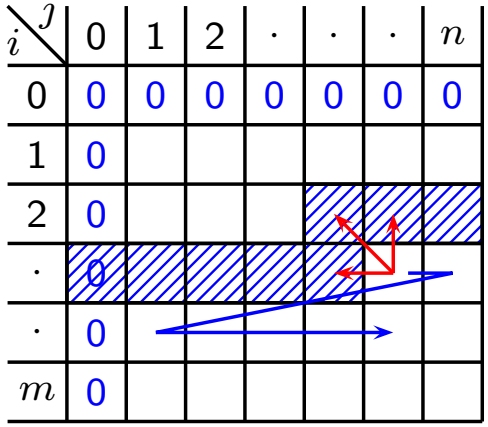
i	j	0	1	2	3	4	5	6
	y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

Følg gemte pile baglæns fra lcs(m, n). Når en skrå pil følges er det en Case I, og x_i $(=y_j)$ udskrives. Ellers er den en Case II, og intet udskrives.

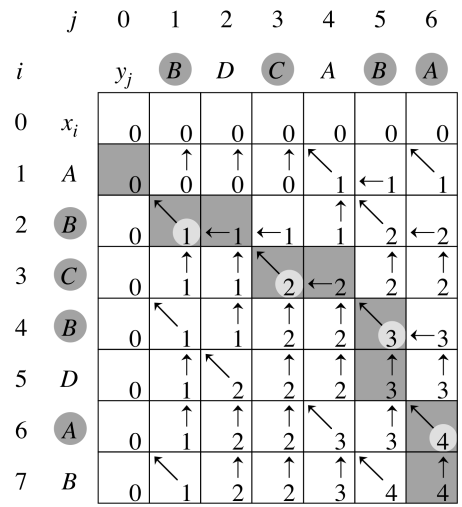
I alt udskrives en længste fælles delsekvens for X og Y i baglæns orden i tid $O(m + n)$.

Pladsforbrug for LCS

Hvis vi kun skal bruge længden af længste fælles delsekvens, kan vi nøjes med $\min\{m, n\}$ plads:



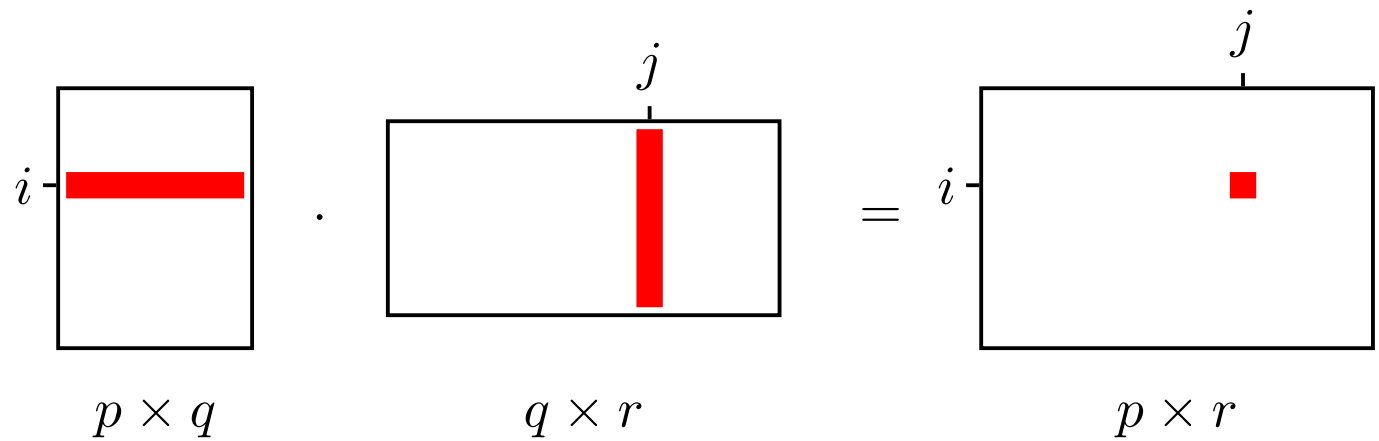
Hvis vi skal bruge en længste fælles delsekvens, må vi gemme hele tabellen, dvs. bruge $\Theta(mn)$ plads (da vi ikke kender stien tilbage, må vi gemme hele tabellen):



[Hirschberg gav i 1975 en metode til også at opnå dette med $\min\{m, n\}$ plads, men det er ikke pensum i DM507.]

Eksempel 2: Multi-Matrix-multiplikation

En $p \times q$ matrix A_1 og en $q \times r$ matrix A_2 kan multipliceres i tid $O(pqr)$. Resultatet er en $p \times r$ matrix.



Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

Multi-Matrix-multiplikation

Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

Men køretiden er IKKE ens. Eksempel:

	A_1	A_2	A_3
	10×100	100×5	5×50
$(A_2 \cdot A_3)$:			100×50
$(A_1 \cdot A_2)$:		10×5	

Tid for $A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$ er $10 \cdot 100 \cdot 50 + 100 \cdot 5 \cdot 50 = 75.000$

Tid for $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$ er $10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 7.500$

Multi-Matrix-multiplikation

Spørgsmålet:

For et produkt af n matricer

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n$$

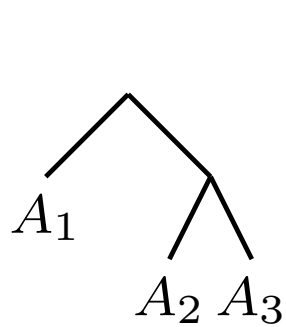
med kombatible dimensioner

A_1	A_2	A_3	$\ldots$	A_{n-1}	A_n
$p_0 \times p_1$	$p_1 \times p_2$	$p_2 \times p_3$	$\ldots$	$p_{n-2} \times p_{n-1}$	$p_{n-1} \times p_n$

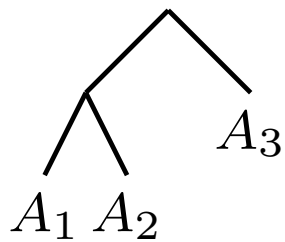
hvad er den billigste rækkefølge at gange dem sammen i?

Beregningstræer

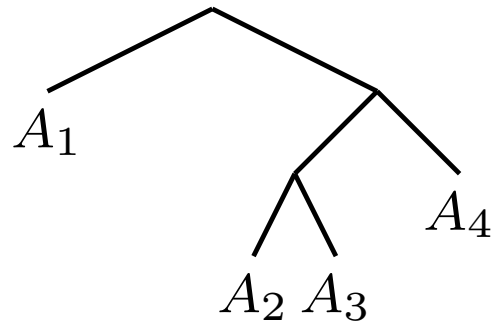
Rækkefølge = parentes-sætning = binært beregningstræ:



$A_1(A_2A_3)$



$(A_1A_2)A_3$



$A_1((A_2A_3)A_4)$

Optimale delprobleme r og rekursiv ligning

Lad $m(i,j)$ være prisen for bedste måde at gange $A_i, \ldots, A_j$ sammen på.

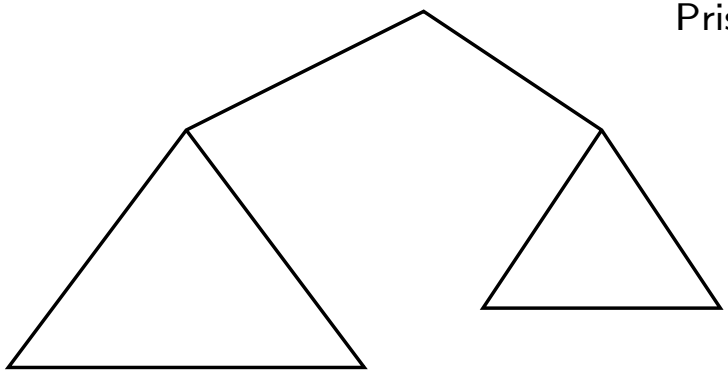
Observation (optimale delprobleme r):

> Undertræerne for roden af et optimalt træ må selv være optimale beregningstræer.

Pris for rod: $p_{i-1}p_k p_j$

Pris for venstre undertræ: $m(i,k)$

Dimension af output af venstre undertræ: $p_{i-1} \times p_k$



Pris for højre undertræ: $m(k+1,j)$

Dimension af output af højre undertræ: $p_k \times p_j$

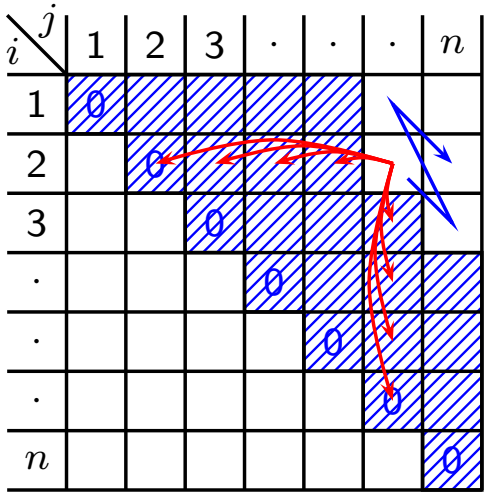
Prøv alle placeringer af rod, dvs. alle split $A_i, \ldots, A_k$ og $A_{k+1}, \ldots, A_j$:

$$m(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \le k < j}\{m(i,k) + m(k+1,j) + p_{i-1}p_k p_j\} & \text{if } i < j \end{cases}$$

Tabel

Gentagelser blandt delproblemers delproblemer. Lav tabel og udfyld systematisk. Målet er at kende $m(1, n)$.

$$m(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \le k < j}\{m(i,k) + m(k+1,j) + p_{i-1}p_k p_j\} & \text{if } i < j \end{cases}$$



Tabelstørrelse: $O(n^2)$.

Udfyld tabelindgang: $O(\text{max størrelse af røde graf}) = O(n)$.

Tid i alt: $O(\text{produktet af de to}) = O(n^3)$.

Find konkret løsning: følg de optimale valg baglæns.