# Algoritmer for Max Sum Problemet

# Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

I segmentet ovenfor er summen

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

# Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

I segmentet ovenfor er summen

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

Spørgsmål: Hvilket segment har størst sum?

# Maximum Sum problemet

Givet et array (liste) af tal kan vi se på summer af segmenter (del-arrays).

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

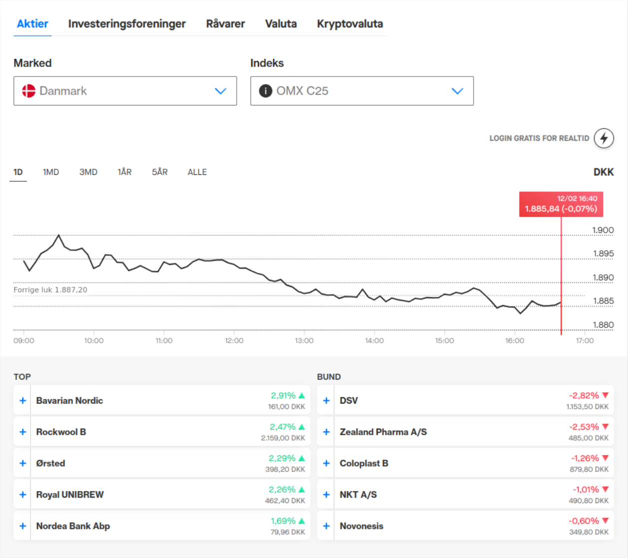
I segmentet ovenfor er summen

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = 7$$

Spørgsmål: Hvilket segment har størst sum?

Et simpelt og fundamentalt problem

# Mere motivation for MaxSum problemet: aktieanalyse




(Fra www.euroinvestor.dk)

# Aktieanalyse

Vi har data af følgende type:

Aktie for Firma X:

| 2023.02.20 | 2023.02.21 | 2023.02.22 | 2023.02.23 | 2023.02.24 | 2023.02.25 | 2023.02.26 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+2\%$ | $-3\%$ | $+8\%$ | $-1\%$ | $-3\%$ | $+3\%$ | $+11\%$ |

Spørgsmål: I hvilken periode har det været bedst at eje aktien?

# Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til

# Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med $3\%$ bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

# Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med $3\%$ bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med $2\%$ bliver det til

# Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

# Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

# Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

$$1000 \cdot 1.03 \cdot 0.98 \ (= 1009.40) \text{ kr.}$$

# Procentregning

Hvis 1000 kr. stiger med 3% bliver det til $1000 \cdot 1.03 = 1030$ kr.

Hvis 1000 kr. falder med 2% bliver det til $1000 \cdot 0.98 = 980$ kr.

Hvis 1000 kr. først stiger med 3% og derefter falder med 2% bliver det til

$$1000 \cdot 1.03 \cdot 0.98 \; (= 1009.40) \text{ kr.}$$

| 2023.02.20 | 2023.02.21 | 2023.02.22 | 2023.02.23 | 2023.02.24 | 2023.02.25 | 2023.02.26 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+2\%$ | $-3\%$ | $+8\%$ | $-1\%$ | $-3\%$ | $+3\%$ | $+11\%$ |

I perioden ovenfor har aktien forandret sig med en faktor

$$0.97 \cdot 1.08 \cdot 0.99 \cdot 0.97 \cdot 1.03$$

# Aktieanalyse

| 2023.02.20 | 2023.02.21 | 2023.02.22 | 2023.02.23 | 2023.02.24 | 2023.02.25 | 2023.02.26 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+2\%$ | $-3\%$ | $+8\%$ | $-1\%$ | $-3\%$ | $+3\%$ | $+11\%$ |

Spørgsmål: I hvilken periode har det været bedst at eje aktien?

$$\Downarrow$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.02 | 0.97 | 1.08 | 0.99 | 0.97 | 1.03 | 1.11 |

Spørgsmål: Hvilket segment har størst produkt?

# Fra maximum produkt til maximum sum

Logaritmer er voksende funktioner. Så

$$0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99 \leq 0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01$$

hvis og kun hvis

$$\log(0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99) \leq \log(0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01)$$

# Fra maximum produkt til maximum sum

Logaritmer er voksende funktioner. Så

$$0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99 \leq 0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01$$

hvis og kun hvis

$$\log(0.94 \cdot 1.05 \cdot 0.99) \leq \log(0.96 \cdot 1.03 \cdot 1.01)$$

Da $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$, gælder ovenstående hvis og kun hvis

$$\log(0.94) + \log(1.05) + \log(0.99) \leq \log(0.96) + \log(1.03) + \log(1.01)$$

# Fra maximum produkt til maximum sum

Så segmentet, der har største produkt i dette array:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.02 | 0.97 | 1.08 | 0.99 | 0.97 | 1.03 | 1.11 |

er det samme som segmentet der har største sum i dette array:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| log 1.02 | log 0.97 | log 1.08 | log 0.99 | log 0.97 | log 1.03 | log 1.11 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0286 | -0.0439 | 0.1110 | -0.0145 | -0.0439 | 0.0426 | 0.1506 |

# Algoritmer for MaxSum

Vi skal finde summen for alle segmenter:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $i$ | | | | | | | $j$ | | | | | |
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

# Algoritmer for MaxSum

Vi skal finde summen for alle segmenter:

| | | | $i$ | | | | | | | $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

Naturlig algoritme ud fra definitionen:

For alle $i$ og for alle $j \geq i$, lav summen fra $i$ til og med $j$.

| | | | $i$ | | | | $k$ | | | $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

# Første algoritme for MaxSum

```
MaxSum1(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        for j = i to n − 1
            sum = 0
            for k = i to j
                sum += A[k]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

| | | | $i$ | | | | $k$ | | | $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

# Første algoritme for MaxSum

```
MaxSum1(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        for j = i to n − 1
            sum = 0
            for k = i to j
                sum += A[k]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

| | | | *i* | | | | *k* | | | *j* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

Korrekt? Følger af definition af problem.

# Første algoritme for MaxSum

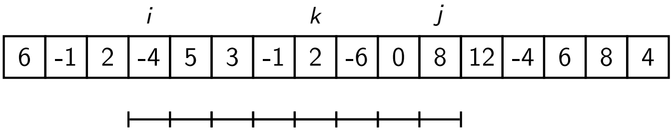
```
MaxSum1(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        for j = i to n − 1
            sum = 0
            for k = i to j
                sum += A[k]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

| | | | $i$ | | | | $k$ | | | $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

Korrekt? Følger af definition af problem. Køretid?

# Første algoritme for MaxSum

```
MaxSum1(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        for j = i to n − 1
            sum = 0
            for k = i to j
                sum += A[k]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```




Korrekt? Følger af definition af problem. Køretid? $\Theta(n^3)$, med samme argument som for Algoritme 3 fra asymptotisk analyse eksemplerne (de har helt samme struktur).

# Observation

$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 = (-1)$$

$$\Downarrow$$

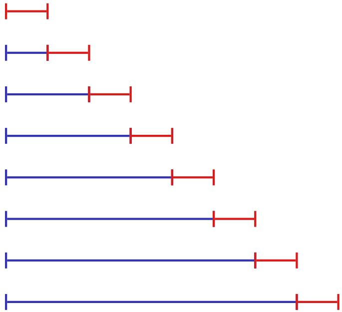
$$(-4) + 5 + 3 + (-1) + 2 + (-6) + 0 + 8 = (-1) + 8 = 7$$

| | | | $i$ | | | | | | $j-1$ | $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |

# Idé til forbedret algoritme

Algoritme: For hvert $i$, beregn summer for stigende $j$ med én ny addition per sum.

| | | | $i$ | | | | | | | $j$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -1 | 2 | -4 | 5 | 3 | -1 | 2 | -6 | 0 | 8 | 12 | -4 | 6 | 8 | 4 |



# Anden algoritme for MaxSum

```
MaxSum2(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        sum = 0
        for j = i to n − 1
            sum += A[j]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

# Anden algoritme for MaxSum

$\textsc{MaxSum2}(n)$
    maxSoFar $= 0$
    **for** $i = 0$ **to** $n - 1$
        sum $= 0$
        **for** $j = i$ **to** $n - 1$
            sum $+= A[j]$
            maxSoFar $=$ max(maxSoFar, sum);
    **return** maxSoFar

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

# Anden algoritme for MaxSum

```
MAXSUM2(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        sum = 0
        for j = i to n − 1
            sum += A[j]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

Køretid?

# Anden algoritme for MaxSum

```
MAXSUM2(n)
    maxSoFar = 0
    for i = 0 to n − 1
        sum = 0
        for j = i to n − 1
            sum += A[j]
            maxSoFar = max(maxSoFar, sum);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt observationen ovenfor.

Køretid? $\Theta(n^2)$, med ca. samme argument som for Algoritme 2 fra asymptotisk analyse eksemplerne.

# Ny observation

$$x_1 \leq x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 + 2 \leq x_2 + 2$$

# Ny observation

$$x_1 \leq x_2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 + 2 \leq x_2 + 2$$

Heraf følger:

$$\max\{x_1 + 2, x_2 + 2, \ldots, x_i + 2\} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} + 2$$

# Ny observation

$$x_1 \leq x_2$$
$$\Updownarrow$$
$$x_1 + 2 \leq x_2 + 2$$

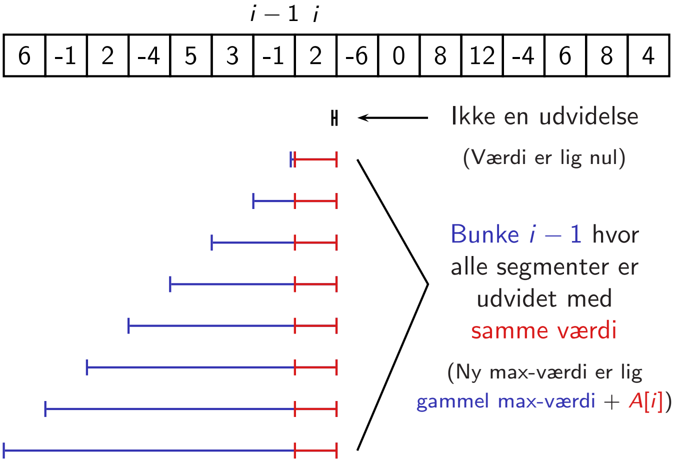
Heraf følger:

$$\max\{x_1 + 2, x_2 + 2, \ldots, x_i + 2\} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_i\} + 2$$

Idé: Kan vi kigge på segmenter i bunker, således at den nye bunke er lig den gamle bunke med alle segmenter udvidet med den samme værdi?

# Idé til forbedret algoritme

Lad bunke $i$ være alle segmenter, som ender ved $A[i]$('s højre kant). Så er bunke $i$ det samme som bunke $i-1$ med alle segmenter udvidet med den samme værdi, plus det tomme segment:



# Tredie algoritme for MaxSum

```
MaxSum3(n)
    maxSoFar = 0
    maxEndingHere = 0
    for i = 0 to n − 1
        maxEndingHere = max(maxEndingHere + A[i], 0)
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);
    return maxSoFar
```

# Tredie algoritme for MaxSum

```
MaxSum3(n)
    maxSoFar = 0
    maxEndingHere = 0
    for i = 0 to n − 1
        maxEndingHere = max(maxEndingHere + A[i], 0)
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det $i$, hvor segmentet ender).

# Tredie algoritme for MaxSum

MaxSum3($n$)
  maxSoFar $= 0$
  maxEndingHere $= 0$
  **for** $i = 0$ **to** $n - 1$
    maxEndingHere $=$ max(maxEndingHere $+ A[i]$, 0)
    maxSoFar $=$ max(maxSoFar, maxEndingHere);
  **return** maxSoFar

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det $i$, hvor segmentet ender).

Køretid?

# Tredie algoritme for MaxSum

```
MaxSum3(n)
    maxSoFar = 0
    maxEndingHere = 0
    for i = 0 to n − 1
        maxEndingHere = max(maxEndingHere + A[i], 0)
        maxSoFar = max(maxSoFar, maxEndingHere);
    return maxSoFar
```

Korrekt? Følger af definition af problem samt den nye observation ovenfor, som sikrer, at vi tager maksimum over alle segmenter (da ethvert segment er med i en bunke, nemlig bunken for det $i$, hvor segmentet ender).

Køretid? Der er $n$ iterationer, som hver tager $\Theta(1)$ tid. Det giver alt i alt $\Theta(n)$.