Analyse af algoritmer for ombytningspuslespil

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- Er den "grådige algoritme" (= sæt én brik på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte én på plads?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- Er den "grådige algoritme" (= sæt én brik på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte én på plads?
- Hvis den grådige algoritme *er* bedst mulig: er der også andre algoritmer som er lige så gode (eller *skal* man sætte én på plads hver gang for at være bedst mulig)?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med *n* brikker?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- Er den "grådige algoritme" (= sæt én brik på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte én på plads?
- Hvis den grådige algoritme *er* bedst mulig: er der også andre algoritmer som er lige så gode (eller *skal* man sætte én på plads hver gang for at være bedst mulig)?
- Mere generelt, *kan vi præcist beskrive alle bedst mulige algoritmer?*

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \ldots, n$, nummereret efter opstillingen når puslespillet er løst:

5	10	14	3
1	11	9	15
8	7	2	12
4	13	6	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \ldots, n$, nummereret efter opstillingen når puslespillet er løst:

5	10	14	3
1	11	9	15
8	7	2	12
4	13	6	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

NB: dette kan også ses som et array/en liste:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	10	14	3	1	11	9	15	8	7	2	12	4	13	6	16

Dette gør vi til opgavetimerne (i programmeringsopgaverne)

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \dots, n$, nummereret efter opstillingen når puslespillet er løst:

5	10	14	3
1	11	9	15
8	7	2	12
4	13	6	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

NB: dette kan også ses som et array/en liste:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	10	14	3	1	11	9	15	8	7	2	12	4	13	6	16

Dette gør vi til opgavetimerne (i programmeringsopgaverne)

En opstilling af tallene $1, 2, 3, \dots, n$ i et array af længde n kaldes også en *permutation*.

Analyse af den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

Analyse af den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

Analyse af den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

Analyse af den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

Analyse af den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

Analyse af den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det minimale antal ombytninger?

Analyse af den grådige algoritme

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det minimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: højst to brik kommer på plads. Derfor mindst $(n - t)/2$ ombytninger.

Kredse

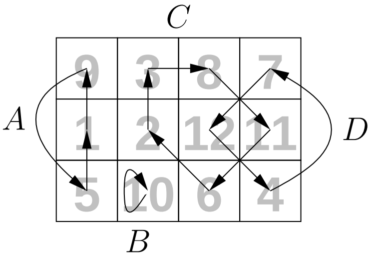
Kan vi lave end *endnu bedre* (dvs. endnu mere præcis) analyse end "mellem $(n-t)/2$ og $n-t$ ombytninger"?

Kredse

Kan vi lave end *endnu bedre* (dvs. endnu mere præcis) analyse end "mellem $(n-t)/2$ og $n-t$ ombytninger"?

Observation: en permutation giver på naturlig måde anledning til en samling kredse:

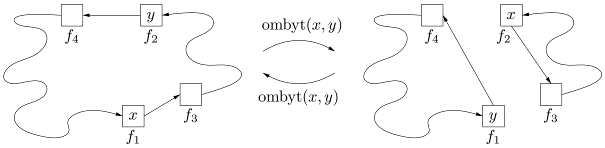
Et tal (en brik) t peger på den plads, hvor den skal stå, nemlig pladsen med nummer t.



Kredse og ombytninger

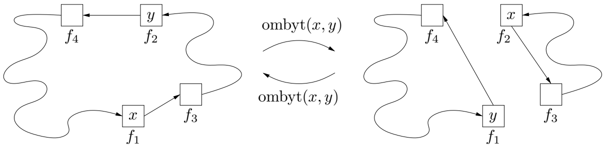
Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Kredse og ombytninger

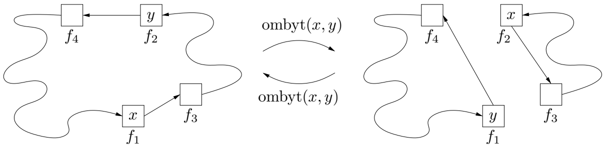
Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Observation: Brik er på plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:

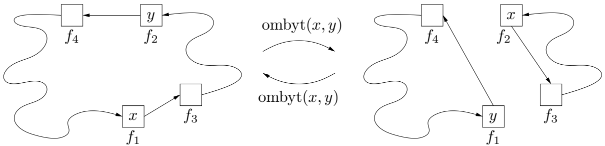


Observation: Brik er på plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst $\Leftrightarrow$ der er n kredse.

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



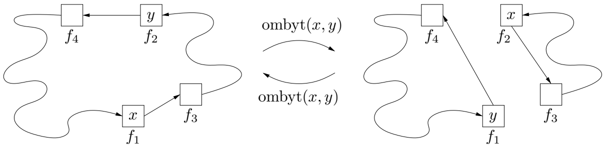
Observation: Brik er på plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst $\Leftrightarrow$ der er n kredse.

Konklusion: Et puslespil med n brikker og k *kredse* i startopstillingen kræver mindst $n - k$ ombytninger, og man kan altid gøre det med $n - k$ ombytninger (bla. via den grådige algoritme, som i hvert skridt deler en kreds af længde t i to kredse af længde $t - 1$ og 1).

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Observation: Brik er på plads ⇔ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst ⇔ der er n kredse.

Konklusion: Et puslespil med n brikker og k *kredse* i startopstillingen kræver mindst $n - k$ ombytninger, og man kan altid gøre det med $n - k$ ombytninger (bla. via den grådige algoritme, som i hvert skridt deler en kreds af længde t i to kredse af længde $t - 1$ og 1).

Konklusion: En algoritme bruger det optimale antal ombytninger $(n - k)$ hvis og kun hvis hver ombytning er med to brikker som er i samme kreds.

Forventet antal kredse

Sætning (uden bevis her): Det forventede antal kredse i en tilfældig permutation er

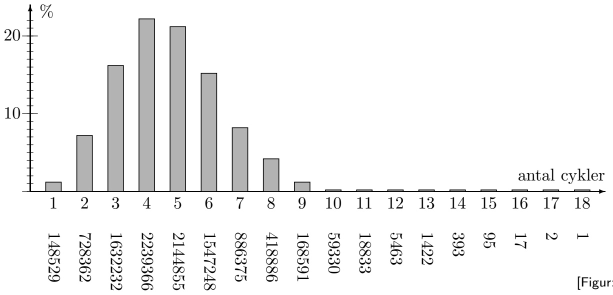
$$H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$$

Forventet antal kredse

Sætning (uden bevis her): Det forventede antal kredse i en tilfældig permutation er

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$$

Ved simulering (afprøvning, 10.000.000 tilfældige permutationer) for $n = 64$ ses følgende fordeling af antallet af permutationer:



[Figur: Gerth Brodal]