

Analyse af algoritmer

Fokus i kurset

Recap fra sidst: i DM507/DM578/DS814/SE4-DMAD vil vi

Beskrive eksisterende algoritmer, udvikle nye algoritmer og vurdere/analysere algoritmer.

Fokus i kurset

Recap fra sidst: i DM507/DM578/DS814/SE4-DMAD vil vi

Beskrive eksisterende algoritmer, udvikle nye algoritmer og
vurdere/analysere algoritmer.

Spørgsmål: hvad skal vi fokusere på, når vi analyserer en algoritme?

Analyse af algoritmer

Mindstekrav til algoritmer er **korrekthed**:

- ▶ Stopper for alle input (aldrig uendelig løkke).
- ▶ Giver korrekt output, når den stopper (dvs. giver et svar på vores problem).

Analyse af algoritmer

Mindstekrav til algoritmer er **korrekthed**:

- ▶ Stopper for alle input (aldrig uendelig løkke).
- ▶ Giver korrekt output, når den stopper (dvs. giver et svar på vores problem).

Korrekte algoritmer kan have forskellig **kvalitet**:

- ▶ Hastighed
- ▶ Pladsforbrug
- ▶ Komplexitet af implementation
- ▶ Ekstra egenskaber (problemspecifikke)

Ingredienser i algoritmeanalyse

Vi har brug for:

- ▶ **Model af problem.** Individuelt for hvert problem (men ofte ret ligetil).

Ingredienser i algoritmeanalyse

Vi har brug for:

- ▶ **Model af problem.** Individuelt for hvert problem (men ofte ret ligetil).
- ▶ **Model af maskine.** Vi bruger RAM-modellen (se næste side).

Ingredienser i algoritmeanalyse

Vi har brug for:

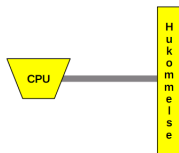
- ▶ **Model af problem.** Individuelt for hvert problem (men ofte ret ligetil).
- ▶ **Model af maskine.** Vi bruger RAM-modellen (se næste side).
- ▶ **Mål for kvalitet.** Vi fokuserer på tidsforbrug.

Ingredienser i algoritmeanalyse

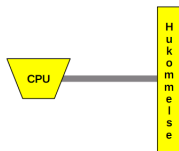
Vi har brug for:

- ▶ **Model af problem.** Individuelt for hvert problem (men ofte ret ligetil).
- ▶ **Model af maskine.** Vi bruger RAM-modellen (se næste side).
- ▶ **Mål for kvalitet.** Vi fokuserer på tidsforbrug.
- ▶ **Matematiske værktøjer.** Vi møder i dette kursus bl.a. asymptotisk notation, invarianter, induktion, rekursionsligninger.

RAM-modellen

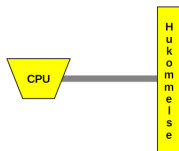


RAM-modellen



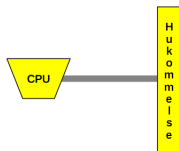
- ▶ En hukommelse: En stor række af celler, hver med plads til et tal eller et tegn. (NB: liste/array = mange naboceller)

RAM-modellen



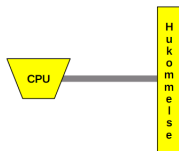
- ▶ En hukommelse: En stor række af celler, hver med plads til et tal eller et tegn. (NB: liste/array = mange naboceller)
- ▶ En CPU med et antal basale operationer:

RAM-modellen



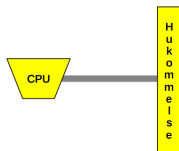
- ▶ En hukommelse: En stor række af celler, hver med plads til et tal eller et tegn. (NB: liste/array = mange naboceller)
- ▶ En CPU med et antal basale operationer:
 - ▶ *plus, minus, gange, sammenlign, ...* to cellers indhold

RAM-modellen



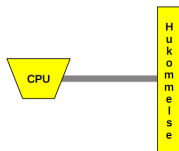
- ▶ En hukommelse: En stor række af celler, hver med plads til et tal eller et tegn. (NB: liste/array = mange naboceller)
- ▶ En CPU med et antal basale operationer:
 - ▶ *plus, minus, gange, sammenlign, ...* to cellers indhold
 - ▶ *flyt* indhold mellem to celler

RAM-modellen



- ▶ En hukommelse: En stor række af celler, hver med plads til et tal eller et tegn. (NB: liste/array = mange naboceller)
- ▶ En CPU med et antal basale operationer:
 - ▶ *plus, minus, gange, sammenlign, ...* to cellers indhold
 - ▶ *flyt* indhold mellem to celler
 - ▶ *jump i program* (\Rightarrow *løkke, forgrening, funktions/metode-kald*).

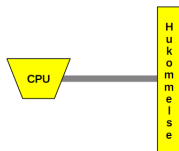
RAM-modellen



- ▶ En hukommelse: En stor række af celler, hver med plads til et tal eller et tegn. (NB: liste/array = mange naboceller)
- ▶ En CPU med et antal basale operationer:
 - ▶ *plus, minus, gange, sammenlign, ...* to cellers indhold
 - ▶ *flyt* indhold mellem to celler
 - ▶ *jump i program* (\Rightarrow *løkke, forgrening, funktions/metode-kald*).

Alle basale operationer antages at tage den samme tid.

RAM-modellen

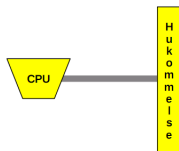


- ▶ En hukommelse: En stor række af celler, hver med plads til et tal eller et tegn. (NB: liste/array = mange naboceller)
- ▶ En CPU med et antal basale operationer:
 - ▶ *plus, minus, gange, sammenlign, ...* to cellers indhold
 - ▶ *flyt* indhold mellem to celler
 - ▶ *jump i program* (\Rightarrow *løkke, forgrening, funktions/metode-kald*).

Alle basale operationer antages at tage den samme tid.

- ▶ **Tid** for en algoritme: antal basale operationer udført.

RAM-modellen



- ▶ En hukommelse: En stor række af celler, hver med plads til et tal eller et tegn. (NB: liste/array = mange naboceller)
- ▶ En CPU med et antal basale operationer:
 - ▶ *plus, minus, gange, sammenlign, ...* to cellers indhold
 - ▶ *flyt* indhold mellem to celler
 - ▶ *jump i program* (\Rightarrow *løkke, forgrening, funktions/metode-kald*).

Alle basale operationer antages at tage den samme tid.

- ▶ **Tid** for en algoritme: antal basale operationer udført.
- ▶ **Plads** for en algoritme: maks antal optagne hukommelsesceller.

Måle tidsforbrug: hvilket input?

For en givet størrelse n af input er der ofte mange forskellige konkrete input.

Måle tidsforbrug: hvilket input?

For en givet størrelse n af input er der ofte mange forskellige konkrete input. Eksempel:

Sortering = stille n elementer i stigende orden

Måle tidsforbrug: hvilket input?

For en givet størrelse n af input er der ofte mange forskellige konkrete input. Eksempel:

Sortering = stille n elementer i stigende orden

For $n = 8$ er følgende lister fire ud af mange mulige input:

7,2,3,1,8,5,4,6

1,8,2,7,3,6,4,5

1,2,3,4,5,6,7,8

8,7,6,5,4,3,2,1

Måle tidsforbrug: hvilket input?

For en givet størrelse n af input er der ofte mange forskellige konkrete input. Eksempel:

Sortering = stille n elementer i stigende orden

For $n = 8$ er følgende lister fire ud af mange mulige input:

7,2,3,1,8,5,4,6

1,8,2,7,3,6,4,5

1,2,3,4,5,6,7,8

8,7,6,5,4,3,2,1

En algoritme har som regel *forskelligt* tidsforbrug på hver af disse.

Måle tidsforbrug: hvilket input?

For en givet størrelse n af input er der ofte mange forskellige konkrete input. Eksempel:

Sortering = stille n elementer i stigende orden

For $n = 8$ er følgende lister fire ud af mange mulige input:

7,2,3,1,8,5,4,6

1,8,2,7,3,6,4,5

1,2,3,4,5,6,7,8

8,7,6,5,4,3,2,1

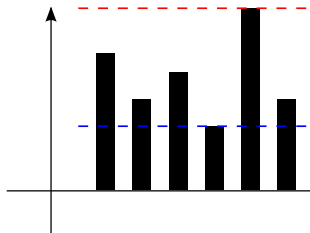
En algoritme har som regel *forskelligt* tidsforbrug på hver af disse.

Hvilke input skal vi bruge til at vurdere tidsforbruget?

Måle tidsforbrug: hvilket input?

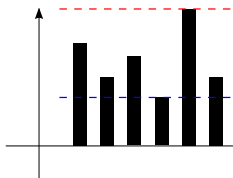
Måle tidsforbrug: hvilket input?

- ▶ **Worst case** (max over alle input af størrelse n)
- ▶ Average case (gennemsnit over en fordeling af input af størrelse n)
- ▶ **Best case** (min over alle input af størrelse n)



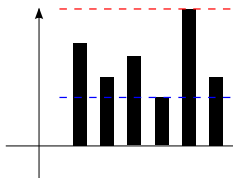
Køretid for de forskellige input af (samme) størrelse n

Worst case tidsforbrug



Worst case giver **garanti**. Er desuden ofte repræsentativ for average case (men kan også være mere pessimistisk).

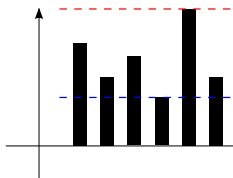
Worst case tidsforbrug



Worst case giver **garanti**. Er desuden ofte repræsentativ for average case (men kan også være mere pessimistisk).

Average case: Hvilken fordeling af input? Hvorfor er denne fordeling realistisk/relevant? Analyse er ofte (matematisk) svær at gennemføre.

Worst case tidsforbrug

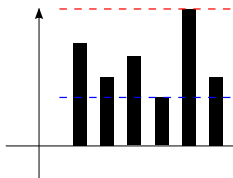


Worst case giver **garanti**. Er desuden ofte repræsentativ for average case (men kan også være mere pessimistisk).

Average case: Hvilken fordeling af input? Hvorfor er denne fordeling realistisk/relevant? Analyse er ofte (matematisk) svær at gennemføre.

Best case: Giver ofte ikke så megen relevant information.

Worst case tidsforbrug



Worst case giver **garanti**. Er desuden ofte repræsentativ for average case (men kan også være mere pessimistisk).

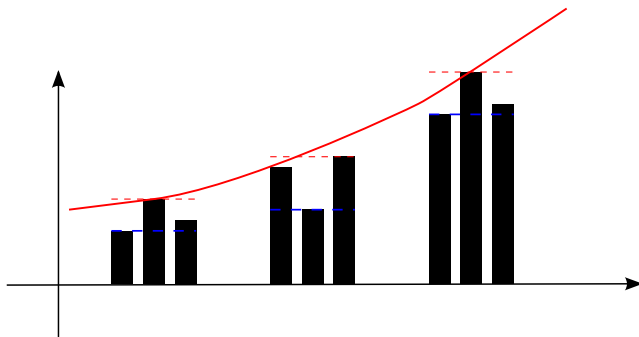
Average case: Hvilken fordeling af input? Hvorfor er denne fordeling realistisk/relevant? Analyse er ofte (matematisk) svær at gennemføre.

Best case: Giver ofte ikke så megen relevant information.

Næsten alle analyser i dette kursus er worst case.

Forskellige inputstørrelser

Worstcase køretid er normalt en voksende funktion af inputstørrelsen n :



Køretid for de forskellige input af stigende størrelse n

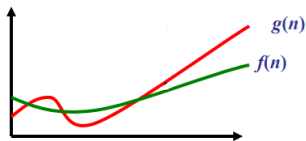
Voksehastighed

En analyse må derfor give en funktion $f(n)$ af inputstørrelsen n .

Voksehastighed

En analyse må derfor give en funktion $f(n)$ af inputstørrelsen n .

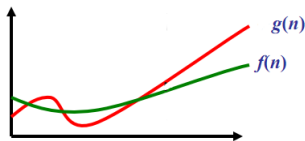
For at sammenligne algoritmers køretid har vi derfor brug for at sammenligne funktioner. Mere præcist vil vi gerne undersøge, hvordan to funktioner $f(n)$ og $g(n)$ vokser, når n stiger.



Voksehastighed

En analyse må derfor give en funktion $f(n)$ af inputstørrelsen n .

For at sammenligne algoritmers køretid har vi derfor brug for at sammenligne funktioner. Mere præcist vil vi gerne undersøge, hvordan to funktioner $f(n)$ og $g(n)$ vokser, når n stiger.

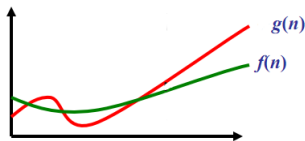


Specielt vil vi gerne kunne genkende, hvis f.eks. $g(n)$ altid vil overstige $f(n)$, når n bliver stor nok. Vi siger så, at $g(n)$ har større voksehastighed end $f(n)$, og vi vil normalt foretrække algoritmen med køretid $f(n)$.

Voksehastighed

En analyse må derfor give en funktion $f(n)$ af inputstørrelsen n .

For at sammenligne algoritmers køretid har vi derfor brug for at sammenligne funktioner. Mere præcist vil vi gerne undersøge, hvordan to funktioner $f(n)$ og $g(n)$ vokser, når n stiger.



Specielt vil vi gerne kunne genkende, hvis f.eks. $g(n)$ altid vil overstige $f(n)$, når n bliver stor nok. Vi siger så, at $g(n)$ har større voksehastighed end $f(n)$, og vi vil normalt foretrække algoritmen med køretid $f(n)$.

For små n er (næsten) alle algoritmer hurtige, så det er køretiden for store n , som er interessant.

Voksehastighed

Eksempler på funktioner listet efter stigende voksehastighed:

$$1, \quad \log n, \quad \sqrt{n}, \quad n, \quad n \log n,$$

$$n\sqrt{n}, \quad n^2, \quad n^3, \quad n^{10}, \quad 2^n$$

Voksehastighed

Eksempler på funktioner listet efter stigende voksehastighed:

$$1, \quad \log n, \quad \sqrt{n}, \quad n, \quad n \log n, \\ n\sqrt{n}, \quad n^2, \quad n^3, \quad n^{10}, \quad 2^n$$

Disse har ret forskellig effektivitet i praksis:

	n	$n \log n$	n^2	n^3	n^{10}	2^n
<i>1 minut</i>	$6,0 \cdot 10^{10}$	$1,9 \cdot 10^9$	245.000	3.910	12	36
<i>1 måned</i>	$2,6 \cdot 10^{15}$	$5,7 \cdot 10^{13}$	50.900.000	137.000	35	51

Tabellen viser, hvilke inputstørrelser n man kan klare, hvis algoritmen skal udføre $f(n)$ CPU-operationer, og den skal være færdig efter henholdsvis et minut og en måned. Det er antaget, at en CPU kan lave 10^9 operationer per sekund. Se udleveret program for beregningerne.

Asymptotisk voksehastighed

Vi laver senere en formel definition af begrebet

asymptotisk voksehastighed

for funktioner. Dette bliver vores værktøj til at sammenligne køretider af algoritmer.