

Dynamisk programmering

Flere eksempler

Eksempel 1: Længste fælles delsekvens

Alfabet = mængde af tegn:

$\{a,b,c,\dots,z\}, \quad \{A,C,G,T\}, \quad \{0,1\}$

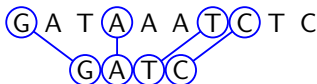
Streng = sekvens $x_1x_2x_3\dots x_n$ af tegn fra et alfabet:

helloworld

GATAAATCTGGTCTTATTTCC

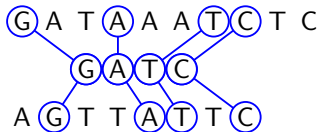
00101100101010001111

Delsekvens = delmængde af tegnene i streng, i uændret rækkefølge:



Længste fælles delsekvens

Fælles delsekvens for to strenge:



Eller blot:



Længste fælles delsekvens (Longest Common Subsequence, LCS):

For to strenge

$$X = x_1 x_2 x_3 \dots x_m$$

$$Y = y_1 y_2 y_3 \dots y_n$$

af længde m og n , find en **længste** fælles delsekvens for dem.

Længden af denne kan ses som et mål for similaritet mellem strenge (f.eks. dna-strenge).

Rekursiv løsning?

Vi vil arbejde på at lave en rekursiv løsning. Vi definerer derfor en størrelse for del-problemer:

- ▶ $X_i = x_1x_2x_3 \dots x_i$ for $1 \leq i \leq m$.
- ▶ $Y_j = y_1y_2y_3 \dots y_j$ for $1 \leq j \leq n$.
- ▶ X_0 og Y_0 er den tomme streng.
- ▶ $\text{lcs}(i, j)$ er **længden** af længste fælles delsekvens af X_i og Y_j .

Vi vil gerne finde $\text{lcs}(m, n)$.

Mere generelt: Vi søger en rekursiv formel for $\text{lcs}(i, j)$.

Basistilfælde: Det er klart at $\text{lcs}(0, j) = \text{lcs}(i, 0) = 0$.

Optimale delproblemer I

Formel for $lcs(i, j)$:

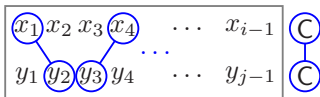
Case I: $x_i = y_j$

Observation: en fælles delsekvens Z for X_i og Y_j af længde k består af

- ▶ Et sidste tegn z_k .
- ▶ En streng $Z' = z_1 z_2 z_3 \dots z_{k-1}$ af længde $k - 1$, som må være en fælles delsekvens af X_{i-1} og Y_{j-1} (tegnene i Z skal komme i samme rækkefølge som i X og Y , så kun sidste tegn i Z har mulighed for at være x_i og y_j).

Observation (optimale delproblemer) for Case I:

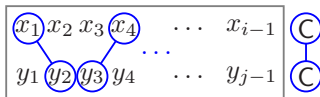
Hvis Z er en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j , må Z' være en længste fælles delsekvens af X_{i-1} og Y_{j-1} . For hvis der fandtes en længere fælles delsekvens for X_{i-1} og Y_{j-1} , kunne den tilføjes tegnet $x_i (= y_j)$ og blive en længere fælles delsekvens for X_i og Y_j .



Optimale delproblemer I

Af observationen høves i **Case I** ($x_i = y_j$):

- ▶ $\text{lcs}(i, j) = \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1$
- ▶ En længste fælles delsekvens for X_{i-1} og Y_{j-1} tilføjet tegnet $x_i (= y_j)$ er en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j .



Optimale delproblemer II

Formel for $\text{lcs}(i, j)$:

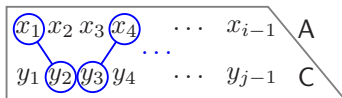
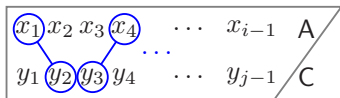
Case II: $x_i \neq y_j$

Observation: en fælles delsekvens $Z = z_1 z_2 z_3 \dots z_k$ for X_i og Y_j kan ikke have z_k værende en parring af x_i og y_j (da disse er forskellige).

Så Z må være en fælles delsekvens for *enten* X_{i-1} og Y_j *eller* for X_i og Y_{j-1} (eller evt. begge).

Observation (optimale delproblemer) for Case II:

Hvis Z er en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j , må den være en længste fælles delsekvens for enten X_{i-1} og Y_j eller for X_i og Y_{j-1} (eller evt. begge). For hvis der fandtes en længere fælles delsekvens for enten X_{i-1} og Y_j eller for X_i og Y_{j-1} , ville denne også være en længere fælles delsekvens for X_i og Y_j .



Optimale delproblemer II

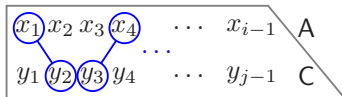
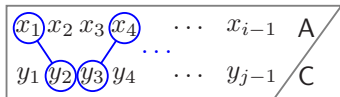
Lad T_1 være en længste fælles delsekvens for X_{i-1} og Y_j , og lad T_2 være en længste fælles delsekvens for X_i og Y_{j-1} .

Af observationen i **Case II** ($x_i \neq y_j$) haves, at blandt T_1 og T_2 er der (mindst) én, som er en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j .

Ingen af T_1 og T_2 kan være længere end den længste fælles delsekvens for X_i og Y_j (da de begge er delsekvenser af X_i og Y_j).

Så af observationen haves i Case II ($x_i \neq y_j$):

- ▶ $\text{lcs}(i, j) = \max(\text{lcs}(i-1, j), \text{lcs}(i, j-1))$
- ▶ Hvis $\text{lcs}(i-1, j) \geq \text{lcs}(i, j-1)$, er en længste fælles delsekvens for X_{i-1} og Y_j også en længste fælles delsekvens for X_i og Y_j . Et symmetrisk udsagn gælder for " \leq " og X_i og Y_{j-1} .



Rekursiv formel for $\text{lcs}(i, j)$

Alt i alt har vi fundet flg. rekursive formel for $\text{lcs}(i, j)$:

$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Den giver anledning til en naturlig, simpel rekursiv algoritme.

MEN: det er nemt at se at der er gentagelser blandt delproblemers delproblemer.

Så samme delproblemer bliver gentagne gange beregnet forskellige steder i rekursionstræet, og køretiden bliver meget dårlig.


Kan evt. løses med memoization: hav en tabel med plads til svaret på alle de mulige delproblemer $\text{lcs}(i, j)$, og gem svaret, når det er beregnet første gang. Siden, slå det bare op.

Dynamisk programmering: udfyld i stedet direkte denne tabel bottom-up på struktureret måde.

Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over $\text{lcs}(i, j)$ bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	.	.	.	n	$i \backslash j$	0	1	2	.	.	.	n	$i \backslash j$	0	1	2	.	.
0								0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1								1	0							1	0				
2								2	0							2	0				
.								.	0							.	0				
.								.	0							.	0				
m								m	0							m	0				




$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Køretid

Dynamisk programmering: udfyld tabel over $lcs(i, j)$ bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	.	.	.	n
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
.	0						
.	0						
m	0						



Tabelstørrelse: mn

Udfyld tabelindgang: $O(\text{max størrelse af røde graf}) = O(1)$.

Tid i alt: $O(\text{produktet af de to}) = O(mn)$.

Find en konkret løsning

$lcs(m, n)$ er **længden** af en længste fælles delsekvens for $X = X_m$ og $Y = Y_n$.

Hvis vi gerne vil finde en konkret fælles delsekvens af denne længde: Gem for hvert felt i tabellen hvilken af de tre røde pile som gav $lcs(i, j)$ -værdien i dette felt.

		j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A	
	x_i								
0	x_i		0	0	0	0	0	0	0
1	A		0	↑	↑	↑	↖	←	↖
2	B		0	↖	←	←	↑	↖	←
3	C		0	↑	↑	↖	←	↑	↑
4	B		0	↖	↑	↑	↑	↖	←
5	D		0	↑	↖	↑	↑	↑	↑
6	A		0	↑	↑	↑	↖	↑	↖
7	B		0	↖	↑	↑	↑	↖	↑

Følg gemte pile baglæns fra $lcs(m, n)$. Når en skrå pil følges er det en Case I, og $x_i (=y_j)$ udskrives. Ellers er den en Case II, og intet udskrives.

I alt udskrives en længste fælles delsekvens for X og Y i baglæns orden i tid $O(m + n)$.

Pladsforbrug for LCS

Hvis vi kun skal bruge længden af længste fælles delsekvens, kan vi nøjes med $\min\{m, n\}$ plads:

$i \backslash j$	0	1	2	.	.	.	n
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
.	0						
.	0						
m	0						

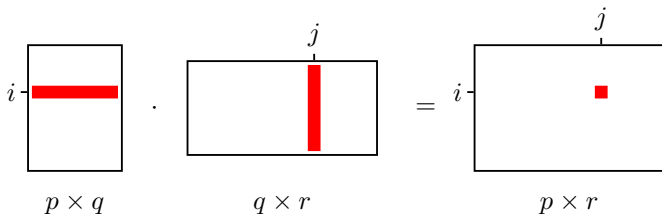
Hvis vi skal bruge en længste fælles delsekvens, må vi gemme hele tabellen, dvs. bruge $\Theta(mn)$ plads (da vi ikke kender stien tilbage, må vi gemme hele tabellen):

j	0	1	2	3	4	5	6
i	y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0
1	A	0	1	0	0	1	1
2	B	0	1	1	1	2	2
3	C	0	1	1	2	2	2
4	B	0	1	1	2	3	3
5	D	0	1	2	2	3	3
6	A	0	1	2	2	3	4
7	B	0	1	2	2	3	4

[Hirschberg gav i 1975 en metode til også at opnå dette med $\min\{m, n\}$ plads, men det er ikke pensum i DM507.]

Eksempel 2: Multi-Matrix-multiplikation

En $p \times q$ matrix A_1 og en $q \times r$ matrix A_2 kan multipliceres i tid $O(pqr)$. Resultatet er en $p \times r$ matrix.



Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

Multi-Matrix-multiplikation

Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

Men køretiden er IKKE ens. Eksempel:

	A_1	A_2	A_3
	10×100	100×5	5×50
$(A_2 \cdot A_3):$			100×50
$(A_1 \cdot A_2):$		10×5	

Tid for $A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$ er $10 \cdot 100 \cdot 50 + 100 \cdot 5 \cdot 50 = 75.000$

Tid for $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$ er $10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 7.500$

Multi-Matrix-multiplikation

Spørgsmålet:

For et produkt af n matricer

$$A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_{n-1} \cdot A_n$$

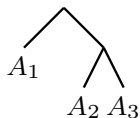
med kompatible dimensioner

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ p_0 \times p_1 & p_1 \times p_2 & p_2 \times p_3 & \dots & p_{n-2} \times p_{n-1} & p_{n-1} \times p_n \end{array}$$

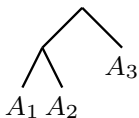
hvad er den billigste rækkefølge at gange dem sammen i?

Beregningstræer

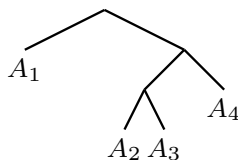
Rækkefølge = parentes-sætning = binært beregningstræ:



$A_1(A_2A_3)$



$(A_1A_2)A_3$



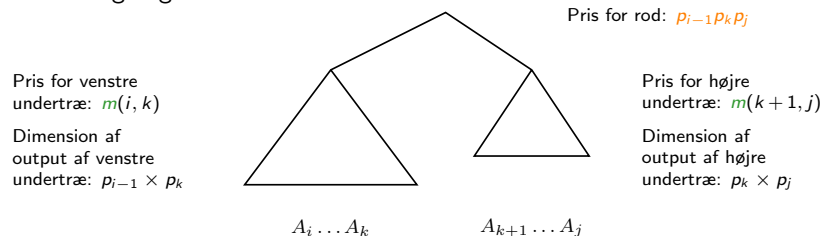
$A_1((A_2A_3)A_4)$

Optimale delproblemer og rekursiv ligning

Lad $m(i, j)$ være prisen for bedste måde at gange A_i, \dots, A_j sammen på.

Observation (optimale delproblemer):

Undertræerne for roden af et optimalt træ må selv være optimale beregningstræer.



Prøv alle placeringer af rod, dvs. alle split A_i, \dots, A_k og A_{k+1}, \dots, A_j :

$$m(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{ m(i, k) + m(k+1, j) + p_{i-1} p_k p_j \} & \text{if } i < j \end{cases}$$

Tabel

Gentagelser blandt delproblemers delproblemer. Lav tabel og udfyld systematisk. Målet er at kende $m(1, n)$.

$$m(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m(i, k) + m(k+1, j) + p_{i-1}p_kp_j\} & \text{if } i < j \end{cases}$$

The diagram shows a DP table for matrix chain multiplication. The table is an $n \times n$ grid with rows and columns indexed from 1 to n . The diagonal cells (where $i = j$) are marked with a blue '0'. The upper triangular cells (where $i < j$) are shaded with blue diagonal lines. A red path is drawn through the table, starting at $(1, 1)$ and ending at (n, n) , representing the sequence of subproblems solved. Blue arrows indicate the direction of the path, showing the recursive steps from smaller subproblems to larger ones.

$i \backslash j$	1	2	3	·	·	·	n
1	0						
2		0					
3			0				
·				0			
·					0		
·						0	
n							0

Tabelstørrelse: $O(n^2)$.

Udfyld tabelindgang: $O(\text{max størrelse af røde graf}) = O(n)$.

Tid i alt: $O(\text{produktet af de to}) = O(n^3)$.

Find konkret løsning: følg de optimale valg baglæns.