Analyse af algoritmer for ombytningspuslespil

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- Er den "grådige algoritme" (= sæt én brik på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte én på plads?

Algoritmer for ombytningspuslespil

Prøv ombytningspuslespillet på kurset webside. Hvilken score opnåede du i tredie forsøg?

- Hvilken algoritme bruger du?
- Kan du sige noget om bedste og værste køretid for din algoritme for puslespil med n brikker?
- Er køretiden relateret til antal brikker, som står rigtigt til at starte med?
- Er den "grådige algoritme" (= sæt én brik på plads i hvert skridt) bedst mulig, eller kan man få flere skridt hvor to sættes på plads ved nogle gange at undlade at sætte én på plads?
- Mere generelt, *kan vi præcist beskrive alle bedst mulige algoritmer?*

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \ldots, n$, nummereret efter den plads, brikken skal stå på:

5	10	14	3
1	11	9	15
8	7	2	12
4	13	6	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \ldots, n$, nummereret efter den plads, brikken skal stå på:

5	10	14	3
1	11	9	15
8	7	2	12
4	13	6	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

NB: pladen kan også modelleres som et array/en liste (grå tal er indekser, her startende med 1):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	10	14	3	1	11	9	15	8	7	2	12	4	13	6	16

Dette gør vi til opgavetimerne (i programmeringsopgaverne)

Model af puslespil

Vi modellerer brikkerne i et puslespil som tallene $1, 2, 3, \ldots, n$, nummereret efter den plads, brikken skal stå på:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 10 & 14 & 3 \\ \hline 1 & 11 & 9 & 15 \\ \hline 8 & 7 & 2 & 12 \\ \hline 4 & 13 & 6 & 16 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}$$

NB: pladen kan også modelleres som et array/en liste (grå tal er indekser, her startende med 1):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	10	14	3	1	11	9	15	8	7	2	12	4	13	6	16

Dette gør vi til opgavetimerne (i programmeringsopgaverne)

En opstilling af tallene $1, 2, 3, \ldots, n$ i et array af længde n kaldes også en *permutation*.

Den grådige algoritme og dens analyse

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

Den grådige algoritme og dens analyse

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

Den grådige algoritme og dens analyse

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

Den grådige algoritme og dens analyse

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

Den grådige algoritme og dens analyse

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

Den grådige algoritme og dens analyse

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det minimale antal ombytninger?

Den grådige algoritme og dens analyse

```
WHILE ikke alle brikker på plads:
  Vælg en brik ikke på plads
  Byt den med brikken på dens plads
```

For et puslespil med n brikker, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt n ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det maksimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: mindst én brik kommer på plads, og ingen brik forlader dens plads. Derfor maksimalt $n - t$ ombytninger.

For et puslespil med n brikker, hvoraf t allerede står på plads, hvad er det minimale antal ombytninger?

> For hver ombytning: højst to brik kommer på plads. Derfor mindst $(n - t)/2$ ombytninger.

Kredse

Denne analyse på mellem $(n-t)/2$ og $n-t$ ombytninger er allerede ganske præcis (øvre og ned grænse er en faktor to fra hinanden).

Kredse

Denne analyse på mellem $(n-t)/2$ og $n-t$ ombytninger er allerede ganske præcis (øvre og ned grænse er en faktor to fra hinanden).

Men vi kan lave en *endnu bedre* (mere præcis) analyse.

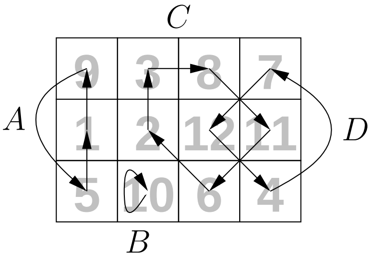
Kredse

Denne analyse på mellem $(n-t)/2$ og $n-t$ ombytninger er allerede ganske præcis (øvre og ned grænse er en faktor to fra hinanden).

Men vi kan lave en *endnu bedre* (mere præcis) analyse.

Observation: en permutation giver på naturlig måde anledning til en samling *kredse*:

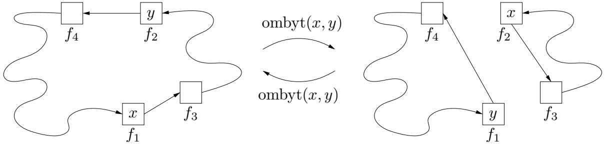
Lad en brik (tal) t pege på den plads, hvor den skal stå, nemlig pladsen med index t.



Kredse og ombytninger

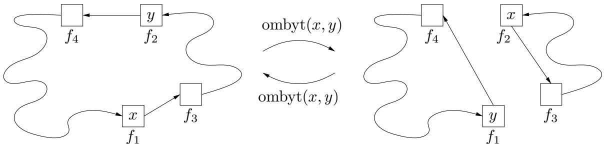
Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Kredse og ombytninger

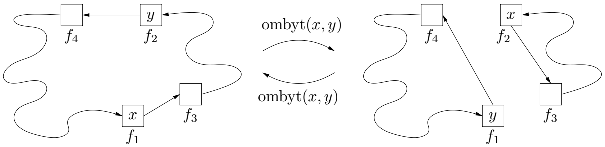
Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Observation: Brik er på plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:

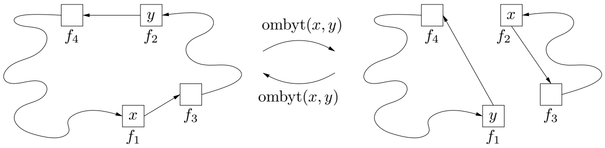


Observation: Brik er på plads ⇔ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst ⇔ der er n kredse.

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



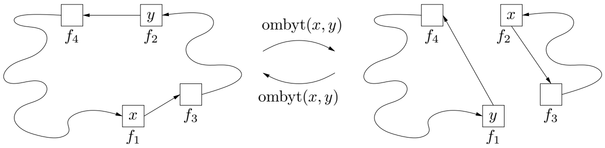
Observation: Brik er på plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst $\Leftrightarrow$ der er n kredse.

Konklusion: Et puslespil med n brikker og k *kredse* i startopstillingen kræver mindst $n - k$ ombytninger, og man kan altid gøre det med $n - k$ ombytninger (bla. via den grådige algoritme, som i hvert skridt deler en kreds af længde t i to kredse af længde $t - 1$ og 1).

Kredse og ombytninger

Observation: En ombytning af to brikker i samme kreds øger antal kredse med præcis én. En ombytning af to brikker i forskellige kredse mindsker antal kredse med præcis én:



Observation: Brik er på plads $\Leftrightarrow$ brik er i en kreds af længde én.

Derfor: puslespil løst $\Leftrightarrow$ der er n kredse.

Konklusion: Et puslespil med n brikker og k *kredse* i startopstillingen kræver mindst $n - k$ ombytninger, og man kan altid gøre det med $n - k$ ombytninger (bla. via den grådige algoritme, som i hvert skridt deler en kreds af længde t i to kredse af længde $t - 1$ og 1).

Konklusion: En algoritme bruger det optimale antal ombytninger $(n - k)$ hvis og kun hvis hver ombytning er med to brikker som er i samme kreds.

Forventet antal kredse

Sætning (uden bevis her): Det forventede antal kredse i en tilfældig permutation er

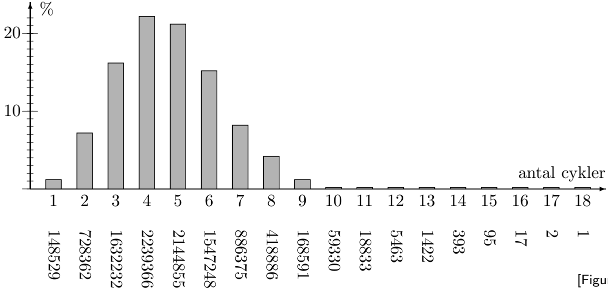
$$H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$$

Forventet antal kredse

Sætning (uden bevis her): Det forventede antal kredse i en tilfældig permutation er

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i$$

Ved simulering (afprøvning, 10.000.000 tilfældige permutationer) for $n = 64$ ses følgende fordeling af antallet af permutationer:



[Figur: Gerth Brodal]