Sortering i lineær tid?

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænse for *alle* sorteringsalgoritmer. Kræver en præcis definition af sorteringsalgoritme.

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænse for *alle* sorteringsalgoritmer. Kræver en præcis definition af sorteringsalgoritme.

Sammenligningbaseret: elementer kan sammenlignes med andre elementer, men ikke deltage i andre operationer.

- Basal handling: sammenlign to elementer i input og foretag derudfra et valg mellem to måder at fortsætte på.
- Svar: den opstilling som skal laves for at få sorteret orden.
- ID for elementer: deres *oprindelige* position (index) i input.

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænse for *alle* sorteringsalgoritmer. Kræver en præcis definition af sorteringsalgoritme.

Sammenligningbaseret: elementer kan sammenlignes med andre elementer, men ikke deltage i andre operationer.

- Basal handling: sammenlign to elementer i input og foretag derudfra et valg mellem to måder at fortsætte på.
- Svar: den opstilling som skal laves for at få sorteret orden.
- ID for elementer: deres *oprindelige* position (index) i input.

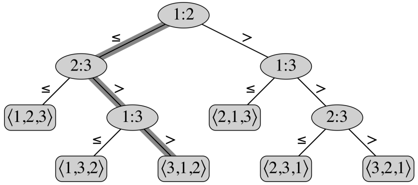
Bemærk: hvis vi starter med at annotere alle input-elementer med deres oprindelige position, kan vi i en konkret algoritme altid følge med i, hvilke to ID'er, som sammenlignes.

Annotering af input:

$$\text{F, A, C, B, E, D} \quad \rightarrow \quad \text{(F,1), (A,2), (C,3), (B,4), (E,5), (D,6)}$$

Decision trees

Præcis model som definerer begrebet "sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer":

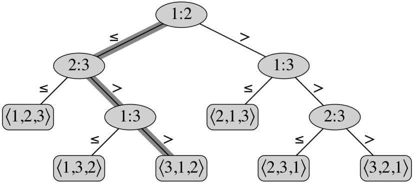


Labels for indre knuder: ID'er (dvs. oprindelige indeks i input) for to input-elementer, som sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling som skal laves for at få sorteret orden (angivet med liste af ID'er, dvs. af oprindelige indekser for input-elementer).

Decision trees

Præcis model som definerer begrebet “sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer”:



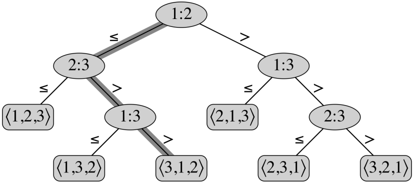
Labels for indre knuder: ID’er (dvs. oprindelige indeks i input) for to input-elementer, som sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling som skal laves for at få sorteret orden (angivet med liste af ID’er, dvs. af oprindelige indekser for input-elementer).

Worst-case køretid: længste rod-blad sti = træets højde.

Decision trees

Præcis model som definerer begrebet “sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer”:



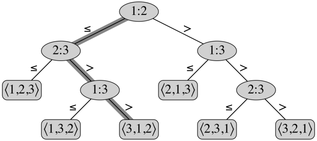
Labels for indre knuder: ID’er (dvs. oprindelige indeks i input) for to input-elementer, som sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling som skal laves for at få sorteret orden (angivet med liste af ID’er, dvs. af oprindelige indekser for input-elementer).

Worst-case køretid: længste rod-blad sti = træets højde.

Bemærk: Insertionsort, selectionsort, mergesort, quicksort, heapsort kan alle beskrives sådan.

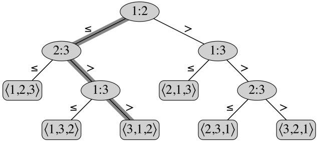
Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellige input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering

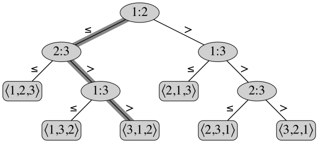


For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellige input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering



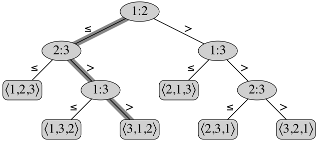
For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellige input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

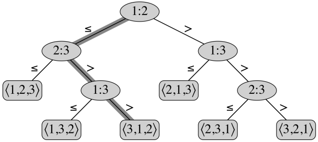
Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellige input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellige input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

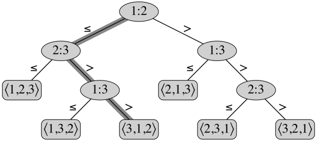
Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

$$= \log(1) + \log(2) + \ldots \log(n/2) \cdots + \log(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(\log(n) - 1)$$

Nedre grænse for sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellige input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade (da det fulde træ af højde h har det).

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

$$= \log(1) + \log(2) + \ldots \log(n/2) \cdots + \log(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(\log(n) - 1)$$

$$\text{Så worst-case køretid } = \text{ træets højde } h = \Omega(n \log n)$$

Counting sort

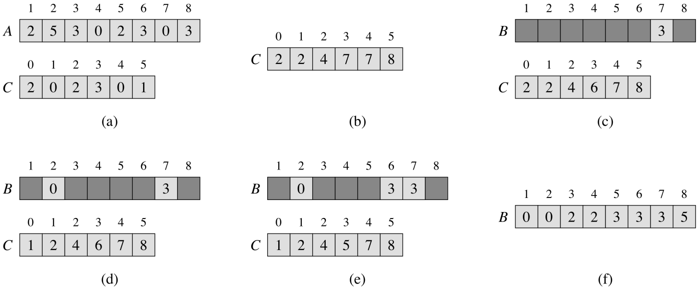
Antager at nøgler er heltal, af størrelse op til k. Derved kan elementer bruges som array-indekser ($\neq$ at bruge sammenligninger på elementer).

Counting sort: Sorterer n heltal af størrelse mellem 0 og k (inkl.).

Input-array A (længde n)

Output-array B (længde n)

Array af tællere for hver mulig elementværdi: C (længde $k+1$)



Counting sort

```
COUNTING-SORT(A, n, k)
let B[1:n] and C[0:k] be new arrays
for i = 0 to k
    C[i] = 0
for j = 1 to n
    C[A[j]] = C[A[j]] + 1
// C[i] now contains the number of elements equal to i.
for i = 1 to k
    C[i] = C[i] + C[i − 1]
// C[i] now contains the number of elements less than or equal to i.
// Copy A to B, starting from the end of A.
for j = n downto 1
    B[C[A[j]]] = A[j]
    C[A[j]] = C[A[j]] − 1    // to handle duplicate values
return B
```

Counting sort

```
COUNTING-SORT(A, n, k)
let B[1 : n] and C[0 : k] be new arrays
for i = 0 to k
    C[i] = 0
for j = 1 to n
    C[A[j]] = C[A[j]] + 1
// C[i] now contains the number of elements equal to i.
for i = 1 to k
    C[i] = C[i] + C[i − 1]
// C[i] now contains the number of elements less than or equal to i.
// Copy A to B, starting from the end of A.
for j = n downto 1
    B[C[A[j]]] = A[j]
    C[A[j]] = C[A[j]] − 1    // to handle duplicate values
return B
```

Tid:

Counting sort

```
COUNTING-SORT(A, n, k)
let B[1:n] and C[0:k] be new arrays
for i = 0 to k
    C[i] = 0
for j = 1 to n
    C[A[j]] = C[A[j]] + 1
// C[i] now contains the number of elements equal to i.
for i = 1 to k
    C[i] = C[i] + C[i - 1]
// C[i] now contains the number of elements less than or equal to i.
// Copy A to B, starting from the end of A.
for j = n downto 1
    B[C[A[j]]] = A[j]
    C[A[j]] = C[A[j]] - 1    // to handle duplicate values
return B
```

Tid: $O(n + k)$

Counting sort

```
COUNTING-SORT(A, n, k)
let B[1 : n] and C[0 : k] be new arrays
for i = 0 to k
    C[i] = 0
for j = 1 to n
    C[A[j]] = C[A[j]] + 1
// C[i] now contains the number of elements equal to i.
for i = 1 to k
    C[i] = C[i] + C[i − 1]
// C[i] now contains the number of elements less than or equal to i.
// Copy A to B, starting from the end of A.
for j = n downto 1
    B[C[A[j]]] = A[j]
    C[A[j]] = C[A[j]] − 1    // to handle duplicate values
return B
```

Tid: $O(n+k)$

Bemærk: stabil, dvs. elementer med ens værdier beholder deres indbyrdes plads (da sidste løkke løber baglæns gennem A (og B for hver værdi)).

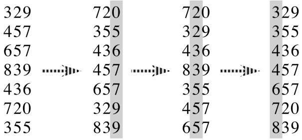
Radix sort

Radix sort: Sorterer n heltal alle med d cifre i base (radix) k.

(dvs. cifrene er heltal i $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$)

På figuren nedenfor er der 7 heltal med 3 cifre i base 10.

RADIX-SORT(A,d)
for $i = 1$ **to** d
use a stable sort to sort A on digit i from right



Tid: $O(d(n+k))$ hvis der bruges Counting Sort i **for**-løkken.

Korrekthed:

Efter i'te iteration af **for**-løkken er A sorteret hvis man kun kigger på de i cifre mest til højre.

Radix sort

Eksempel: heltal i 10-talsystemet med bredde 12

$\boxed{486\ 239\ 123\ 989}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 10^{12})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^{12} = 1.000.000.000.000$

Radix sort

Eksempel: heltal i 10-talsystemet med bredde 12

$\boxed{486\ 239\ 123\ 989}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 10^{12})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^{12} = 1.000.000.000.000$

Se som 2-cifrede tal i base 10^6 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{486\ 239}\ \boxed{123\ 989}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 10^6))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^6 = 1.000.000$

Radix sort

Eksempel: heltal i 10-talsystemet med bredde 12

$\boxed{486\ 239\ 123\ 989}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 10^{12})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^{12} = 1.000.000.000.000$

Se som 2-cifrede tal i base 10^6 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{486\ 239}$ $\boxed{123\ 989}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 10^6))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^6 = 1.000.000$

Se som 4-cifrede tal i base 10^3 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{486}$ $\boxed{239}$ $\boxed{123}$ $\boxed{989}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(4(n + 10^3))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 10^3 = 1.000$

Radix sort

Eksempel: heltal i 2-talsystemet med bredde 32

$\boxed{11011001\ 10011000\ 01101000\ 10110101}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Radix sort

Eksempel: heltal i 2-talsystemet med bredde 32

$\boxed{11011001\ 10011000\ 01101000\ 10110101}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Se som 2-cifrede tal i base 2^{16} (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{11011001\ 10011000}$ $\boxed{01101000\ 10110101}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 2^{16}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{16} = 65.536$

Radix sort

Eksempel: heltal i 2-talsystemet med bredde 32

$\boxed{11011001\ 10011000\ 01101000\ 10110101}$

Countingsort sorterer disse i tid $O(n + 2^{32})$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{32} = 4.294.967.296$

Se som 2-cifrede tal i base 2^{16} (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{11011001\ 10011000}\ \boxed{01101000\ 10110101}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 2^{16}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{16} = 65.536$

Se som 4-cifrede tal i base 2^8 (bemærk: sorteret orden er den samme)

$\boxed{11011001}\ \boxed{10011000}\ \boxed{01101000}\ \boxed{10110101}$

Radixsort sorterer disse i tid $O(4(n + 2^8))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^8 = 256$