Sortering

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 9$$

Mange opgaver er hurtigere i sorterede data (tænk på ordbøger, adresselister i telefoner,...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering er en fundamental og central opgave.

Mange algoritmer er udviklet: Insertionsort, Selectionsort, Bubblesort, Mergesort, Quicksort, Heapsort, Radixsort, Countingsort, ...

Vi skal møde alle ovenstående i dette kursus.

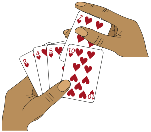
Sortering

Kommentarer:

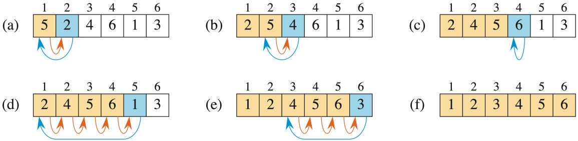
- Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.
- Vi vil antage, at input ligger i en liste (Python) / et array (Java).
- Man sorterer ofte elementer sammensat af en sorteringsnøgle samt yderligere information. Sorteringsnøglen kan være et tal, kommatal, eller andet der kan sammenlignes (f.eks. strenge/ord). Vi viser i dette kursus blot elementer som heltal.

Insertionsort

Bruges af mange, når man sorterer en hånd i kort:



Samme idé udført på tal i en liste / et array:

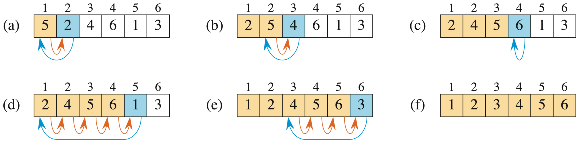


Argument for korrekthed: Den gule del af array er altid sorteret. Denne del udvides med én hele tiden ($\Rightarrow$ algoritmen stopper, og når den stopper er alle elementer sorteret).

Insertionsort

Som pseudo-kode:

```
INSERTION-SORT(A, n)
for i = 2 to n
    key = A[i]
    // Insert A[i] into the sorted subarray A[1 : i − 1].
    j = i − 1
    while j > 0 and A[j] > key
        A[j + 1] = A[j]
        j = j − 1
    A[j + 1] = key
```



Analyse af køretid for Insertionsort

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $i = 2$ **to** n	c_1	n
$\quad key = A[i]$	c_2	$n-1$
$\quad$ // Insert $A[i]$ into the sorted subarray $A[1:i-1]$.	0	$n-1$
$\quad j = i-1$	c_4	$n-1$
$\quad$ **while** $j > 0$ and $A[j] > key$	c_5	$\sum_{i=2}^{n} t_i$
$\quad\quad A[j+1] = A[j]$	c_6	$\sum_{i=2}^{n}(t_i - 1)$
$\quad\quad j = j-1$	c_7	$\sum_{i=2}^{n}(t_i - 1)$
$\quad A[j+1] = key$	c_8	$n-1$

Her er t_i hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres. Dvs. $t_i - 1$ er hvor mange gange denne løkke kører (hvilket er hvor mange elementer det i'te element skal forbi under indsættelsen). Bemærk, at $1 \leq t_i \leq i$. Sæt $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_8$.

Best case: $t_i = 1$ for alle i. Samlet tid $\leq c \cdot n$.

Worst case: $t_i = i$ for alle i. Samlet tid $\leq c \cdot n^2$, eftersom

$$\sum_{i=2}^{n} i \leq (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \leq \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

```
indListe = input
udListe = tom liste
while indListe ikke tom:
    find mindste element x i indListe
    flyt x fra indListe til enden af udListe
```

Klart **korrekt**, dvs. giver sorteret output (hvert element, som udtages, er mindre eller lig alle efterfølgende, der udtages).

Køretid?

I alt n gange findes mindste element i `IndListe`.

En simpel metode til er finde mindste element er lineær søgning, som kigger én gang på hvert tilbageværende element.

Derved bliver tiden $\leq c \cdot (n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) \leq c \cdot n^2$.

Merge

Input: To **sorterede** rækker A og B
Output: De samme elementer i én sorteret række C

Eksempel:

$$\begin{array}{l} A = 2,4,5,7,8 \\ B = 1,2,3,6 \end{array} \quad \Rightarrow \quad C = 1,2,2,3,4,5,6,7,8$$

Vi kan naturligvis sortere $A \cup B$.

Men det er hurtigere at flette (**merge**):

Repeat:
Flyt det mindste af de to forreste elementer i A og B til enden af C

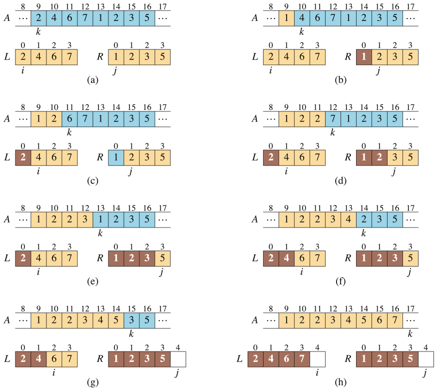
Køretid: $\leq c \cdot n$, hvor $n =$ antal elementer i alt i A og B.

Korrekthed: Merge kan ses som en udgave af Selectionsort, der udnytter at A og B er sorterede, så den mindste i (resten af) $A \cup B$ kan findes ved kun at se på de to forreste i A og B, hvilket tager konstant tid.

Eksempel på merge

Her antages, at de to input-lister er nabodele af samme liste/array A, nemlig $A[p \dots q]$ og $A[q+1 \dots r]$. De flyttes først over i L og R.

(Bemærk, at i bogen er $A[p \dots q]$ lig elementerne $A[p]$, $A[p+1]$,…, $A[q]$, hvilket er ét element mere end næsten samme notation i Python.)

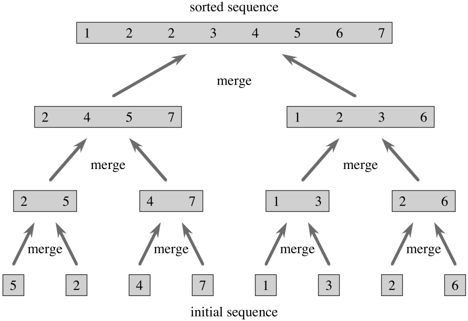


Pseudo-kode for Merge

```
MERGE(A, p, q, r)
n_L = q - p + 1          // length of A[p : q]
n_R = r - q              // length of A[q + 1 : r]
let L[0 : n_L - 1] and R[0 : n_R - 1] be new arrays
for i = 0 to n_L - 1     // copy A[p : q] into L[0 : n_L - 1]
    L[i] = A[p + i]
for j = 0 to n_R - 1     // copy A[q + 1 : r] into R[0 : n_R - 1]
    R[j] = A[q + j + 1]
i = 0                    // i indexes the smallest remaining element in L
j = 0                    // j indexes the smallest remaining element in R
k = p                    // k indexes the location in A to fill
// As long as each of the arrays L and R contains an unmerged element,
//     copy the smallest unmerged element back into A[p : r].
while i < n_L and j < n_R
    if L[i] ≤ R[j]
        A[k] = L[i]
        i = i + 1
    else A[k] = R[j]
        j = j + 1
    k = k + 1
// Having gone through one of L and R entirely, copy the
//     remainder of the other to the end of A[p : r].
while i < n_L
    A[k] = L[i]
    i = i + 1
    k = k + 1
while j < n_R
    A[k] = R[j]
    j = j + 1
    k = k + 1
```

Mergesort

Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:

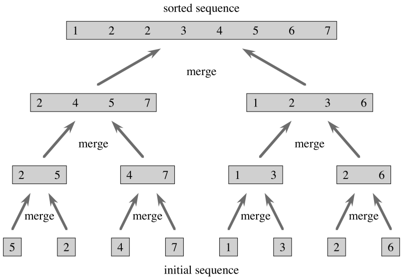


Tid: Hver merge bruger højst $c \cdot n_1$ tid, hvor n_1 er antal elementer der merges. Så alle merge-operationer i ét lag bruger tilsammen højst $c \cdot (n_1 + n_2 + \dots) = c \cdot n$. Dette gælder alle lagene. Der er i alt $\log_2 n$ lag, så den samlede tid er højst $c \cdot n \cdot \log_2 n$.

Mergesort

Hvorfor er der $\log_2 n$ merge-lag?

Antal sorterede lister efter k merge-lag (antag at n er en potens af 2):



k	Antal lister
$\vdots$	$\vdots$
k	$n/2^k$
$\vdots$	$\vdots$
3	$n/2^3$
2	$n/2^2$
1	$n/2$
0	n

Algoritmen stopper, når der er én sorteret liste:

$$n/2^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = 2^k \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 n = k$$

Mergesort hvis n ikke er en potens af 2?

Algoritmen merger i hvert lag så mange par, den kan, og der bliver evt. én liste, som ikke merges (denne er med som liste på næste lag).

F.eks. bliver 12 lister til $12/2 = 6$ lister mens 13 $(= 12 + 1)$ lister bliver til $12/2 + 1 = 6 + 1 = 7$ lister.

Generelt: Hvis der er x lister før et merge-lag, er der $\lceil x/2 \rceil$ lister efter.

Se på to input størrelse n og n', med $n \leq n'$. Da $\lceil x/2 \rceil$ er en voksende funktion af x, kan antallet af lister i hvert lag ikke være mindre for n' end for n. Derfor kan antallet af lag (før algoritmen når ned på én liste) ikke være mindre for n' end for n.

Sæt n' til mindste potens af to, som er større end eller lig n. Der er præcis $\log_2 n'$ lag for n', og dermed højst så mange lag for n.

Omvendt er det nemt at se, at for $n = 2^k + 1$ er der $k + 1 = \lceil \log_2 n \rceil$ lag. Så der er $\lceil \log_2 n \rceil$ lag for generelt n.

n	7	$8 = 2^3$	9	10	11	12	13	14	15	$16 = 2^4$	17
$\log_2(n)$	2.807	3	3.169	3.321	3.459	3.584	3.700	3.807	3.906	4	4.087
Antal lag	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5

Mergesort

Mergesort som pseudo-kode, i en variant formuleret med rekursion:

```
MERGE-SORT(A, p, r)
if p ≥ r                                  // zero or one element?
    return
q = ⌊(p + r)/2⌋                           // midpoint of A[p : r]
MERGE-SORT(A, p, q)                       // recursively sort A[p : q]
MERGE-SORT(A, q + 1, r)                   // recursively sort A[q + 1 : r]
// Merge A[p : q] and A[q + 1 : r] into A[p : r].
MERGE(A, p, q, r)
```

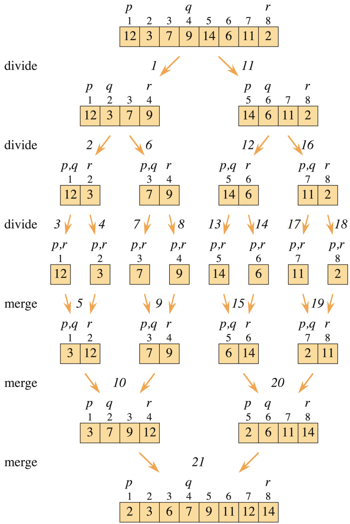
Et kald $\textsc{Merge-Sort}(A,p,r)$ har til opgave at stille elementerne i $A[p \ldots r]$ i sorteret orden.

Første kald er $\textsc{Merge-Sort}(A,1,n)$, som har til opgave at sortere hele A.

Et kald $\textsc{Merge}(A,p,q,r)$ merger de to sorterede del-arrays/lister $A[p \ldots q]$ og $A[q+1 \ldots r]$ sammen til $A[p \ldots r]$.

Mergesort

Eksempel på kørsel:



Quicksort

Mergesort:

- Del input op i to dele X og Y (trivielt)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Merge de to sorterede dele til én sorteret del (reelt arbejde)

Basistilfælde: $n \leq 1$ (allerede sorteret, gør intet)

Quicksort:

- Del input op i to dele X og Y så $X \leq Y$ (reelt arbejde)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Returner X efterfulgt af Y (trivielt)

Basistilfælde: $n \leq 1$ (allerede sorteret, gør intet)

[Hoare, 1960]

Quicksort

Som pseudo-kode:

```
QUICKSORT(A, p, r)
if p < r
    // Partition the subarray around the pivot, which ends up in A[q].
    q = PARTITION(A, p, r)
    QUICKSORT(A, p, q - 1)  // recursively sort the low side
    QUICKSORT(A, q + 1, r)  // recursively sort the high side
```

Et kald $\textsc{Quicksort}(A,p,r)$ har til opgave at stille elementerne i $A[p \dots r]$ i sorteret orden.

Første kald er $\textsc{Quicksort}(A,1,n)$, som har til opgave at sortere hele A.

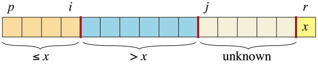
Et kald $\textsc{Partition}(A,p,r)$ vælger et element $x \in A$ og opdeler $A[p \dots r]$ således at:

$$A[q] = x \qquad A[p \dots q-1] \leq x \qquad A[q+1 \dots r] > x$$

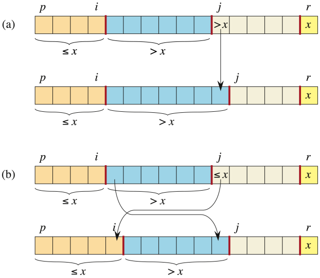
Partition

Hvordan lave PARTITION?

Idé: Vælg et element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del). Opbyg de to dele under et gennemløb af array ud fra flg. princip:

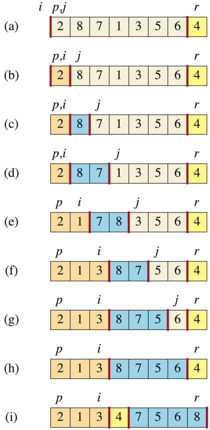


Hvordan tage et skridt under gennemløb?



Partition

Et eksempel på gennemløb:

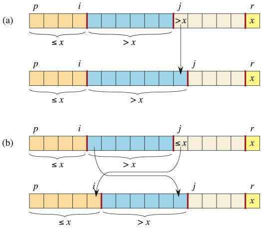


Tid: $O(n)$, hvor n er antal elementer i $A[p \ldots r]$.

Partition

Som pseudo-kode:

```
PARTITION(A, p, r)
x = A[r]                          // the pivot
i = p − 1                         // highest index into the low side
for j = p to r − 1                // process each element other than the pivot
    if A[j] ≤ x                   // does this element belong on the low side?
        i = i + 1                 // index of a new slot in the low side
        exchange A[i] with A[j]   // put this element there
exchange A[i + 1] with A[r]       // pivot goes just to the right of the low side
return i + 1                      // new index of the pivot
```



Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

To ekstremer af størrelser på rekursive kald:

- Helt ubalanceret: 0 og $n - 1$
- Helt balanceret: $\lceil (n-1)/2 \rceil$ og $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$

- Hvis alle partitions er helt balancerede: $O(n \log n)$ (ca. samme analyse som for Mergesort).
- Hvis alle partitions er helt ubalancerede: $O(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1) = O(n^2)$.

Man kan vise at dette er henholdsvis best case og worst case for Quicksort.

Quicksort køretid

- I praksis: køretid $O(n \log n)$ for næsten alle input.
- Bemærk dog: allerede sorteret input giver køretid $\Theta(n^2)$, hvis opdelingselement x i Partition vælges som sidste element (hvad bogen gør). Brug ikke det valg i praksis.
- Forslag til mere robuste valg af opdelingselement x: enten som midterelementet, som medianen af flere elementer, som et tilfældigt element, eller som medianen af flere tilfældigt valgte elementer.
- Quicksort er *inplace*: bruger ikke mere plads end input-array'et.
- Kode er meget effektiv i praksis. En godt implementeret Quicksort er ofte bedste all-round sorteringsalgoritme (og valgt i mange biblioteker, f.eks. Java og C++/STL).

Heapsort

En Heap er:

1. et binært træ
2. med heap-orden
3. og heap-facon
4. udlagt i et array

(Note: “heap” bruges også om et hukommelsesområde brugt til allokering af objekter under et programs udførsel. De to anvendelser er urelaterede.)

[Williams, 1964]

1) Binært træ

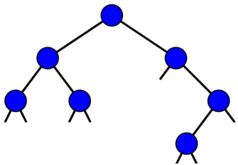
Et binært træ er enten

- det tomme træ

eller

- en knude v samt to undertræer (et højre og et venstre).

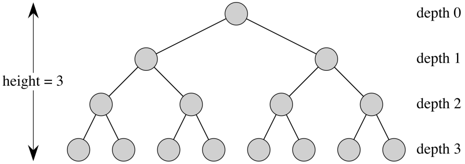
Visualisering:



Knuden v kaldes også rod for træet. Hvis v har et ikke-tomt undertræ, kaldes roden u af dette for et barn af v, og v kaldes u's forælder. Hvis begge v's undetræer er tomme, kaldes v et blad. Stregerne mellem børn og forældre kaldes for kanter. Forældre/barn-begrebet generaliserer på naturlig måde til forfader og efterkommer.

1) Binært træ

- Dybde af knude = antal kanter til rod
- Højde af knude = max antal kanter til blad
- Højde af træ = højde af dets rod
- Fuldt (complete) binært træ = træ hvor alle lag er helt fyldte.



Et fuldt binært træ af højde h har

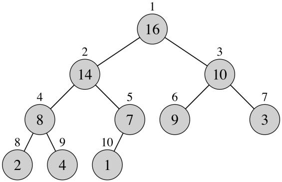
$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^h = \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

knuder (formel A.5 side 1147), heraf 2^h blade.

2) Heap-orden

Et binært træ med værdier i alle knuder er max-heap-ordnet hvis det for enhver knude v med barn u gælder at

$$\text{værdi i } v \geq \text{værdi i } u$$



(a)

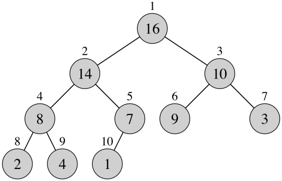
[Bemærk: en ækvivalent definition er, at det for enhver knude knude v med efterkommer u gælder, at værdi i $v \geq$ værdi i u.]

I et max-heap-ordnet træ vil roden indeholde den største værdi i hele heapen.

Et træ er min-heapordnet, hvis ovenstående gælder med $\leq$ i stedet for $\geq$.

3) Heapfacon

Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



(a)

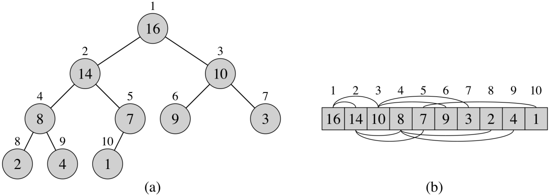
For et træ af heapfacon af højde h med n knuder:

$$n > \text{antal knuder i fuldt træ af højde } h-1 = 2^h - 1$$

$$n > 2^h - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 > 2^h \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(n+1) > h$$

4) Heap udlagt i et array

Et binært træ i heapfacon kan naturligt udlægges i et array ved at tildele array-indekser til knuder ved et top-down, venstre-til-højre gennemløb af træets lag:



Navigering mellem børn og forældre i array-versionen kan udføres ved simple beregninger: Knuden på plads i har

- Forælder på plads $\lfloor i/2 \rfloor$
- Børn på plads $2i$ og $2i + 1$

(Se figur ovenfor. Formelt bevis til øvelsestimer.)

Operationer på en heap

Vi ønsker at lave følgende operationer på en heap:

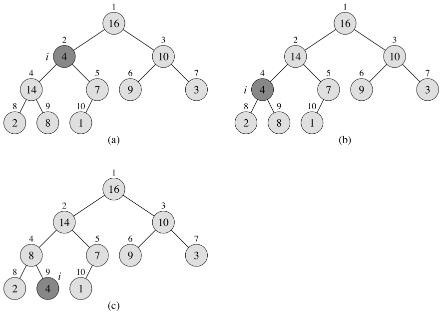
- MAX-HEAPIFY: Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens undertræ til at overholde heap-orden.
- BUILD-MAX-HEAP: Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

[Navnene ovenfor er for en max-heap. For en min-heap findes de samme operationer med "min-" i stedet for "max-" i navnet.]

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens værdi mindre end et eller begge børns værdier.
- Løsning: byt plads med barnet med den største værdi, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.

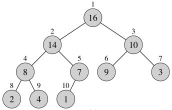


Tid: O(højde af knude).

Max-Heapify

Som pseudo-kode (med indarbejdet check for at man ikke kigger "for langt" i arrayet, dvs. længere end plads n):

$\text{MAX-HEAPIFY}(A, i, n)$
  $l = \text{LEFT}(i)$
  $r = \text{RIGHT}(i)$
  if $l \leq n$ and $A[l] > A[i]$
    $largest = l$
  else $largest = i$
  if $r \leq n$ and $A[r] > A[largest]$
    $largest = r$
  if $largest \neq i$
    exchange $A[i]$ with $A[largest]$
    $\text{MAX-HEAPIFY}(A, largest, n)$

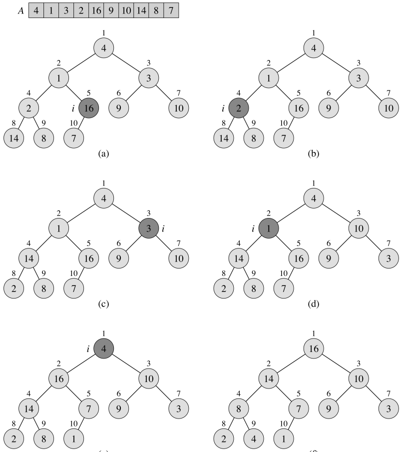


(a)

Build-Heap

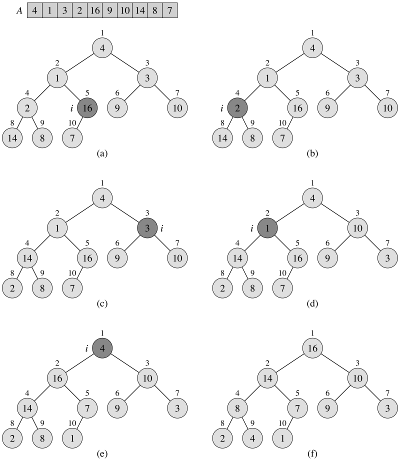
Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

- Ide: arranger elementerne i heap-facon, bring derefter træet i heap-orden nedefra og op.
- Observation: et træ af størrelse én overholder altid heaporder.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Build-Heap

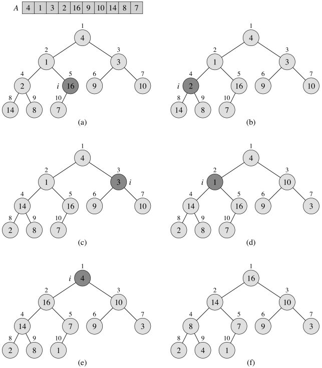


Tid: $O(n \log_2 n)$ klart. Bedre analyse giver $O(n)$.

Build-Heap

Som pseudo-kode:

$$\textsc{Build-Max-Heap}(A, n)$$
$$\textbf{for } i = \lfloor n/2 \rfloor \textbf{ downto } 1$$
$$\quad \textsc{Max-Heapify}(A, i, n)$$



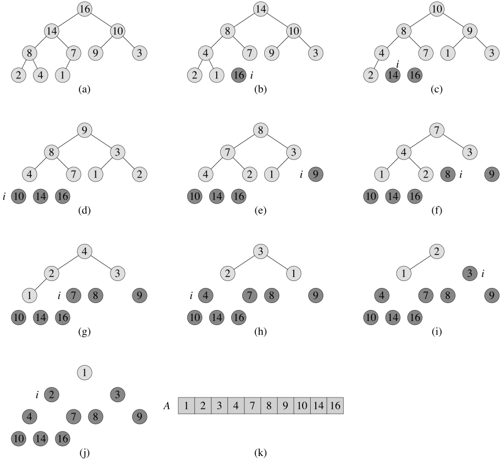
Heapsort

En form for selectionsort hvor der bruges en heap til hele tiden at udtage det største tilbageværende element:

byg en heap
gentag til heap er tom:
  udtag rod (største element i heapen)
  sæt sidste element op som ny rod
  genskab heap-struktur ved MAX-HEAPIFY på ny rod.

Heapsort

Eksempel:



Heapsort

Som pseudo-kode:

```
HEAPSORT(A, n)
  BUILD-MAX-HEAP(A, n)
  for i = n downto 2
      exchange A[1] with A[i]
      MAX-HEAPIFY(A, 1, i − 1)
```

Tid: $O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$

Tre $n \log n$ sorteringsalgoritmer

	Worstcase	Inplace
QuickSort		$\surd$
MergeSort	$\surd$	
HeapSort	$\surd$	$\surd$

Heapsort kører dog langsommere end Mergesort og Quicksort pga. ineffektiv brug af hukommelse (random access).

Introsort [Musser, 1997]: brug Quicksort, men skift under rekursionen til heapsort hvis rekursionen bliver for dyb. Dette giver en inplace, worst case $O(n \log n)$ algoritme, med god køretid i praksis (dette er sorteringsalgoritmen i standardbiblioteket STL for C++).