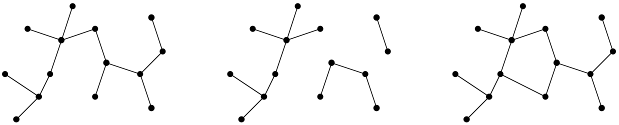
Minimum udSpændende Træer (MST)

Træer

Et (frit/u-rodet) træ er en uorienteret graf $G = (V, E)$ som er

- Sammenhængende: der er en sti mellem alle par af knuder.
- Acyklisk: der er ingen kreds af kanter.



(a) (b) (c)

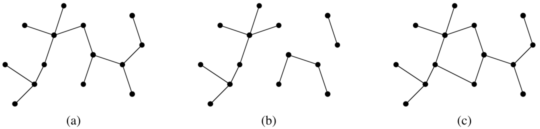
Træ Skov Graf med kreds (ikke træ)

(Uorienteret, acyklisk graf = skov af træer.).

Træer

Sætning (B.2): For uorienteret graf $G = (V, E)$ er flg. ækvivalent (gælder det ene, gælder det andet):

1. G er et træ (dvs. sammenhængende og acyklisk).
2. G er sammenhængende, men er det ikke hvis nogen kant fjernes.
3. G er sammenhængende og $m = n - 1$.
4. G er acyklisk, men er det ikke hvis nogen kant tilføjes.
5. G er acyklisk og $m = n - 1$.
6. Mellem alle par af knuder er der præcis én vej.



Bevis (ikke pensum): se appendix B.5.

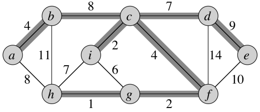
Læs (pensum) appendix B.4 og B.5 for basale definitioner for grafer.

Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for uorienteret, sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ.

NB: *samme* knudemængde V. Vi tænker fra nu af på T blot som E'.



Iflg. sætning B.2 har alle udspændende træer $n - 1$ kanter.

Minimum udSpændende Træ (MST) for en *vægtet* uorienteret sammenhængende graf G: et udspændende træ for G som har mindst mulig sum af kantvægte (dvs. intet udspændende træ har mindre sum).

Motivation: forbind punkter i et forsyningsnetværk (elektricitet, olie,...) billigst muligt. Kant i G: mulig forbindelse, vægt: pris for at etablere forbindelse. Dette var motivationen for den første algoritme for problemet (Borůvka, 1926, Østrig-Ungarn, nu Tjekkiet).

Algoritmer for MST

Grundidé er grådig algoritme: byg MST ved at vælge kanterne én efter én ved hjælp af en passende regel.

Korrekthed: via den sædvanlige invariant for korrekthed af grådige algoritmer: "Hvad vi har bygget indtil nu er en del af en optimal løsning".

Dvs. følgende invariant, hvor $A \subseteq E$ er de indtil nu valgte kanter:

$$\boxed{\text{Der findes et MST, som indeholder } A.}$$

Terminologi: safe kant for A er en kant, som kan tilføjes uden at ødelægge invarianten (mindst én må findes, når invarianten gælder og $|A| < n - 1$).

Algoritmer for MST

Invariant: Der findes et MST, som indeholder A.

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

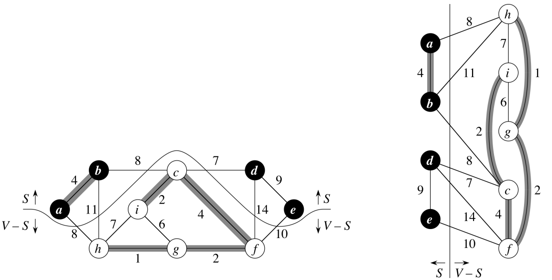
- Initialisering: Enhver sammenhængende graf har et mindst ét ST (via sætningen fra B.5, punkt 2 - fjern kanter til betingelsen nås), og har derfor et MST. Dette indeholder kantmængden $\emptyset$.
- Vedligeholdelse: Er det samme, som at den valgte kant er safe.
- Terminering: ethvert (M)ST indeholder præcis $n - 1$ kanter. Da A vokser med én kant per iteration, giver invarianten, at algoritmen terminerer, og at A da er et MST (A er indeholdt i et MST, og har samme antal kanter som dette, så A er lig dette).

Cuts

MEN: Hvordan finde en safe kant?

Cut: En delmængde $S \subseteq$ af knuderne.

Kan ses som en to-deling af knuderne i to mængder S og $V - S$.



(a) (b)

Kant henover cut: en kant i $S \times (V - S)$.

Cut-sætning

Sætning:

Hvis

- der eksisterer et MST, som indeholder A,
- S er et cut, som A ikke har kanter henover,
- e er en letteste kant blandt kanterne henover cuttet,

så

- er e safe for A (dvs. der der eksisterer et MST som indeholder $A \cup \{e\}$).

Cut-sætning

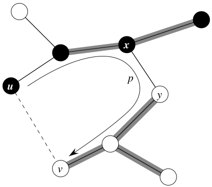
Bevis:

- Der findes et MST T som indeholder A.
- Vi skal lave et MST T' som indeholder $A \cup \{e\}$.

Lad $e = (u, v)$ være en letteste kant henover cuttet S.

Da T er sammenhængende, må der være en sti i T mellem u og v, hvorpå der er mindst én kant (x, y) henover cuttet S.

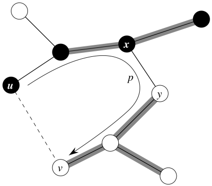
Lad T' være T med (x, y) udskiftet til $e = (u, v)$:



(Viste kanter = T, fede kanter = A, cut er angivet med knudefarver.)

Cut-sætning

Lad T' være T med (x, y) udskiftet til $e = (u, v)$:



Som T er T' stadig sammenhængende (i alle stier kan (x, y) erstattes af resten af stien fra u til v, samt kanten (u, v)), og har n knuder og $n - 1$ kanter. T' er derfor et træ (pga. sætning tidligere). Det kan kun være lettere end T. Derfor er T' også et MST.

T' indeholder $A \cup \{e\}$, da den fjernede kant (x, y) ikke er i A, eftersom A ingen kanter har henover cuttet. □

Brug af cut-sætning i MST-algoritmer

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

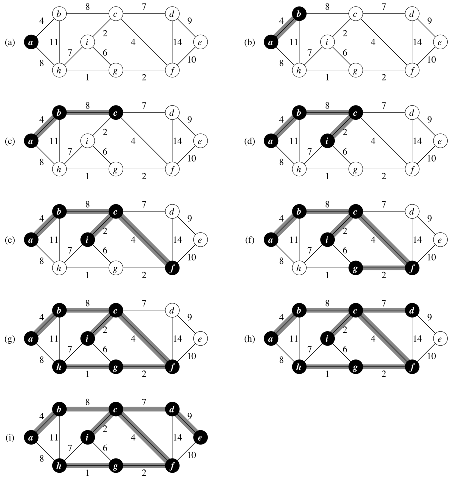
Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter A.

- En ny kant (u, v) med begge endepunkter i *samme* sammenhængskomponent i $G' = (V, A)$ vil introducere en kreds og dermed ødelægge invarianten. Sådanne er derfor aldrig safe.
- En ny kant (u, v) med endepunkterne i *forskellige* sammenhængskomponenter C_1 og C_2 i $G' = (V, A)$ er safe, hvis den er en letteste kant ud af C_1: brug cut-sætning på cuttet C_1.

Man ser nemt, at hvis A udvides med en kant med endepunkterne i forskellige sammenhængskomponenter C_1 og C_2 i G', vil det ændre sammenhængskomponenterne i G' ved at C_1 og C_2 slås sammen til én sammenhængskomponent.

Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

Tager udgangspunkt i en (vilkårlig) startknude r. Udvider hele tiden r's sammenhængskomponent i .



Prim-Jarnik MST-algoritmen

Tager udgangspunkt i en (vilkårlig) startknude r. Udvider hele tiden r's sammenhængskomponent C i $G' = (V, A)$.

En knude $v \in V - C$ gemmer information om sin korteste kant henover cuttet C i felterne v.key og $v.\pi$. Mængden A er $\{(v, v.\pi) \mid v \in C - \{r\}\}$.

Knuderne i $V - C$ opbevares i en (min-)prioritetskø Q.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid: n INSERT, n EXTRACTMIN, m DECREASEKEY på prioritetskø af størrelse $O(n)$, i alt $O(m \log n)$, da $m \geq n - 1$ (G sammenhængende).

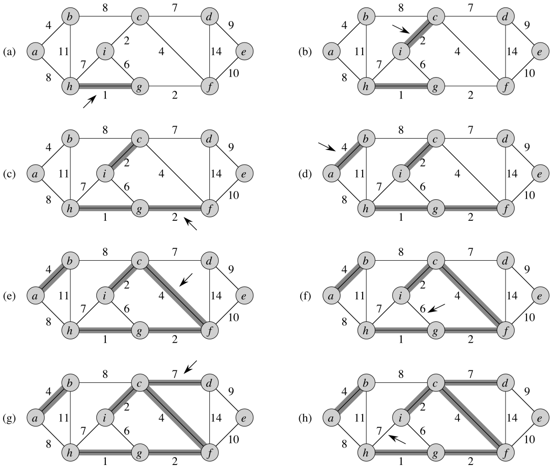
Kruskal MST-algoritmen (1956)

Forsøger at tilføje kanter til A i global letteste-først orden.

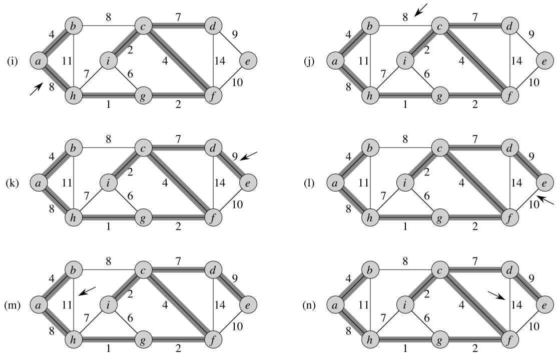
Recap fra side 11:

1. En kant (u, v) kan aldrig tilføjes til A, hvis u og v ligger i samme sammenhængskomponent i $G' = (V, A)$.
2. Hvis en kant (u, v) mellem to forskellige sammenhængskomponenter tilføjes til A, vil disse to sammenhængskomponenter blive til én bagefter.

Kruskal MST-algoritmen



Kruskal MST-algoritmen



Kruskal MST-algoritmen

Vedligeholder sammenhængskomponenterne i $G' = (V, A)$ ved hjælp af en *disjoint-set* datastruktur på V:

$$\textsc{Make-Set}(x),\ \textsc{Union}(x, y)\ \textsc{Find-Set}(x)$$

Mere præcist:

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

Kruskal MST-algoritmen

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

Klart ud fra recap side 14 om sammenhængskomponenter at:

1. Datastrukturen vedligeholder sammenhængskomponenterne i $G' = (V, A)$.
2. En kant undersøgt (IF-sætningen) har begge endepunkter i samme sammenhængskomponent efter undersøgelsen, uanset udfaldet af testen i IF-sætningen. Da sammenhængskomponenter i G' kun slås sammen undervejs, gælder dette også for kanten i resten af algoritmen.

Kruskal, korrekthed

På det tidspunkt, hvor algoritmen tilføjer en kant (u, v) til A, ligger u og v i forskellige sammenhængskomponenter C_1 og C_2 i $G' = (V, A)$. [Dette følge af punkt 1 samt testen i IF-sætningen.]

Vi ser på cuttet givet ved u's sammenhængskomponent C_1. Alle lettere kanter er allerede undersøgt, og har derfor begge endepunkter i samme sammenhængskomponent i G' [punkt 2]. Derfor er (u, v) en letteste kant henover dette cut, og vi kan derfor bruge cut-sætningen.

Når algoritmen stopper, er alle kanter undersøgt. Enhver kant i inputgrafen $G = (V, E)$ har derfor begge endepunkter i samme sammenhængskomponent i $G' = (V, A)$ [punkt 2]. Sådanne kanter kan ikke tilføjes A uden at introducere en kreds.

Så A er selv det MST (fra invarianten), som indeholder A, da ingen kanter kan tilføjes A. Så algoritmen er korrekt.

Bemærk at der lavet præcis $n - 1$ UNION operationer undervejs, da hver tilføjer én kant til A, og da et MST har $n - 1$ kanter.

Kruskal, køretid

Arbejde:

Sortér m kanter
Lav n $\textsc{Make-Set}$, $n-1$ $\textsc{Union}$, m $\textsc{Find-Set}$.

Fra tidligere: der findes en datastruktur for disjoint-sets hvor

- n $\textsc{Make-Set}(x)$
- $n-1$ $\textsc{Union}(x,y)$
- m $\textsc{Find-Set}(x)$

tager i alt $O(m + n\log n)$ tid.

Samlet køretid for Kruskal er

$$O(m \log m)$$

eftersom $m \geq n-1$, da inputgrafen er sammenhængende.