Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

5. februar 2025
RF

Opgaver Uge 7

DM507/DM578/DS814/SE4-DMAD

I DM507/DM578/DS814, samt den del af SE4-DMAD som handler om algoritmer og datastrukturer (Rolfs del), er opgaverne til øvelsestimerne (også kaldet eksaminatorier eller e-timer) delt i to grupper:

A. En første samling opgaver, som man løser *i øvelsestimerne* med instruktoren til rådighed for spørgsmål undervejs og med fælles opsamling til sidst. Disse opgaver skal altså *ikke* løses på forhånd. Man skal blot have læst på stoffet fra forelæsningen. Man må meget gerne arbejde i grupper i timerne (oplagt, hvis man er i en studiegruppe allerede), da det er en stor hjælp af tale højt med andre om løsning af opgaver.

B. En anden samling opgaver med samme type stof som den første samling. Svaret på disse opgaver løber man kort igennem til sidst i øvelsestimen mht. mulige løsningsmetoder, men opgaverne skal løses *hjemme* (gerne sammen med sin studiegruppe) inden de *næste* øvelsestimer. Disse opgaver er der så kort opsamling på i starten af den næste øvelsestime.

A: Løses i løbet af øvelsestimerne i uge 7

1. Cormen et al., 4. udgave, problem 1.1 (side 15) [Cormen et al., 3. udgave: problem 1.1 (side 14)]. Erstat dog "microseconds" med "nanoseconds" (dvs. 10^{-9} sekunder), da dette cirka er, hvad en CPU-cyklus tager på en moderne processor. Du skal kun udfylde søjlerne *second* og *hour*, og kun rækkerne med n, $n \log n$, n^2, n^3 og 2^n. Start med n^2.

For nogle af indgangene kan man finde svaret ved matematisk udregning, for andre må man skyde sig frem mod svaret ved at indsætte forskellige værdier af n.

Målet for opgaven er at få føling med betydningen af voksehastigheder af algoritmers køretider ved at se på hvilke inputstørrelser, som kan behandles med et givent tidsbudget. Så det er resultaterne, mere end selve udregningsmetoden, som er det interessante.

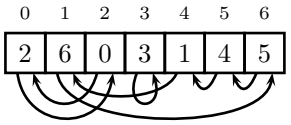
2. Brodals noter om puslespil, opgave 1.

3. Brodals noter om puslespil, opgave 2. Her betyder "optimal følge af ombytninger" et antal ombytninger som angivet af sætning 1 i noterne. Opgaven viser, at andre algoritmer end "grådige algoritmer" (algoritmer som altid bringer mindst ét element på plads) kan være optimale for dette puslespilsproblem.

4. Lav et Java- eller Python-program, som genererer en tilfældig permutation af heltallene fra 0 til $n-1$ (for et n som er en input parameter). I Java kan man bruge typen `ArrayList` samt metoden `shuffle` fra `Collections` utility klassen. I Python kan man bruge lister samt funktionen `shuffle` fra modulet `random`. Udskriv tallene i din permutation.

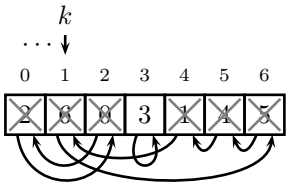
5. Hvis et array/en liste indeholder en permutation af tallene 0 til $n-1$ kan man definere kredse på samme måde som for puslespillet fra første forelæsning: et tal x, som står på plads y i arrayet, giver en pil fra plads y til plads x (dvs. hvis tallet 1 står på plads 4 i arrayet, er der en pil fra plads 4 til plads 1), og en samling pile, der hænger sammen i en cyklisk kæde, kaldes en kreds.

   Her er et eksempel, hvor der i alt er tre kredse i permutationen (check at du finde dem):



   Lav en algoritme, som tæller antal kredse i en permutation. Hint: hav en tæller k, som løber fra 0 til $n-1$. For hver værdi af k check om en uopdaget kreds starter på index k. Hver gang dette er tilfældet,

gennemløbes kredsen, og alle dens elementer markeres som opdaget. Figuren nedenfor viser situationen, efter at k er nået til index 1 og lige har gennemløbet kredsen startende der (så to kredse er på nuværende tidspunkt gennemløbet). Et kryds over et element betyder, at det er opdaget.



Hvad er køretiden for din algoritme som funktion af n?

Implementer din algoritme i Java eller Python.

B: Løses hjemme inden øvelsestimerne i uge 8

1. Fortsæt med Cormen et al., 4. udgave, problem 1.1 (side 15) [Cormen et al., 3. udgave: problem 1.1 (side 14)]. Du skal stadig erstatte "microseconds" med "nanoseconds" (dvs. 10^{-9} sekunder) og stadig kun se på rækkerne med n, $n \log n$, n^2, n^3 og 2^n, men skal nu udfylde søjlerne *year* og *century*. For nogle af indgangene kan man finde svaret ved matematisk udregning, for andre må man prøve sig frem ved at indsætte forskellige værdier af n.

2. I øvelsestimen lavede du et program, som kunne generere en tilfældig permutation, og et program, som kunne tælle antal kredse i en permutation.

   Brug disse programmer til at generere en masse tilfældige permutationer af længde 16, og tæl for hver af dem antallet af kredse i dem.

   Brug data fra disse kørsler til at give et bud på sandsynligheden for, at der i en tilfældig permutation med $n = 16$ er k kredse, for $k = 1, 2, \ldots, 16$. Dvs. lav (data til) din egen version af figur 3 i noterne, men med n lig 16 og ikke 64.

   Find også det gennemsnitlige antal kredse i dine eksperimenter. Passer dit tal med formlen på side 4 i noterne, dvs. er det tæt på $H_{16} = \sum_{i=1}^{16} 1/i = 1/1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/16$?