ALGORITMER

Formålet med denne note er at give en introduktion til:

Algoritmer
- Specifikation, f.eks. v.h.a. pseudokode
- Analyse
  - Køretid, v.h.a. asymptotiske notation
  - Korrekthed, f.eks. v.h.a. løkke-invarianter

Dette emne er et uddrag af kurset
DM507 – Algoritmer og Datastrukturer
som ligger på 2. semester (d.v.s. i foråret 2018)
og undervises af Rolf Fagerberg

En algoritme er en „opskrift" på, hvordan man løser et bestemt problem.

Mere formelt (Fra Computer Science: An Overview Brookshear, Brylow):

> An algorithm is an ordered set of unambiguous, executable steps that define a terminating process.

Til at beskrive algoritmer er det nyttigt at bruge pseudokode:
„Høj-niveau sprog", hvor man bruger keywords, som i programmerings-sprog, men også almindelig tekst.

Eks:

Søg efter et element x i en liste L

Kan gøres v.h.a. sekventiel søgning (også kaldet lineær søgning):

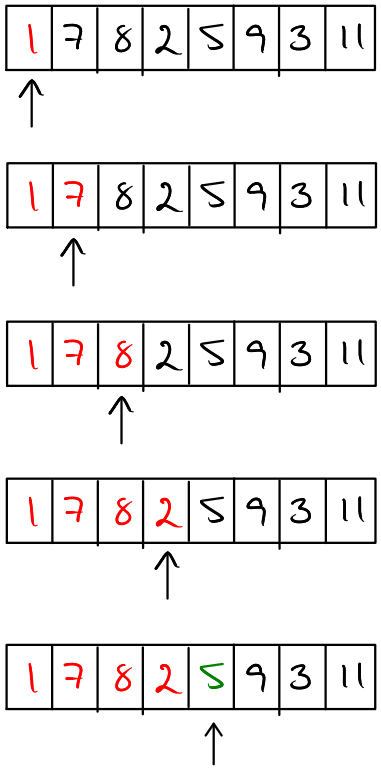
```
SequentialSearch(L, x)
n := L.length
i := 1
While i≤n and L[i] ≠ x
    i++
If i≤n
    Return i
Else
    Return "Not found"
```

Er dette en algoritme?
Ordered, unambiguous, executable, terminating?

Eks: $x = 5$

$L =$ | 1 | 7 | 8 | 2 | 5 | 9 | 3 | 11 |

$L =$



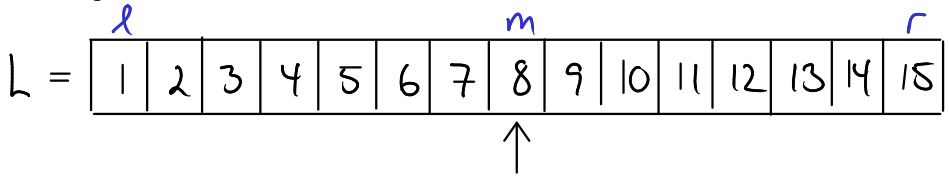
x og samtlige elementer til venstre for x checkes.
Hvis x ikke findes i L, checkes alle elementer i L.

Bemærk, at den samlede køretid er proportional med #check.
Derfor siger vi, at køretiden er $O(n)$.

O-notationen giver en øvre grænse for „størrelses-ordenen" af køretiden.

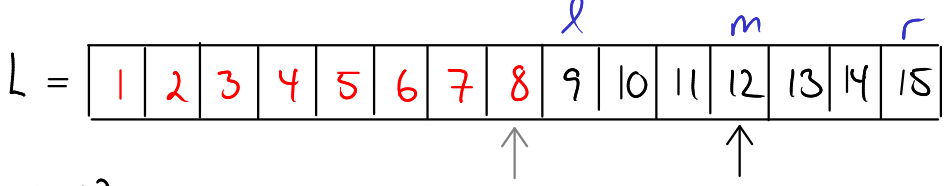
Hvis L er sorteret, kan det gøres mere effektivt o.h.a. binær søgning:

Eks: $x = 10$

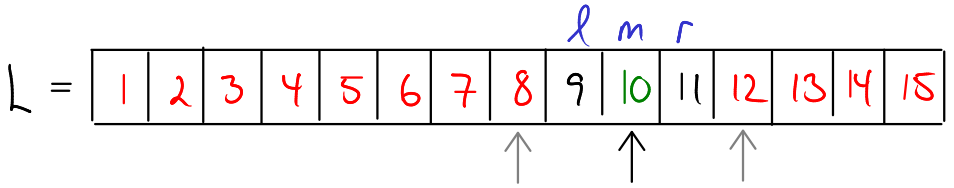


Check midterste element

$x > 8$, så vi fortsetter søkingen til høyre for 8:



$x < 12$

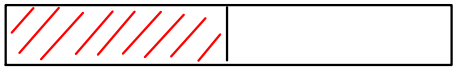



```
BinarySearch(L, x)
l := 1, r := L.length, m := ⌊(l+r)/2⌋
While l ≤ r and L[m] ≠ x
    If x < L[m]
        r := m-1
    Else
        l := m+1
    m := ⌊(l+r)/2⌋
If l ≤ r
    Return m
Else
    Return "Not found"
```

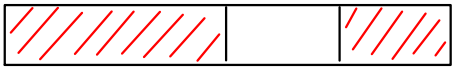
I eksemplet ovenfor checkede vi 3 ud af 15 tal.
I værste tilfælde ville vi have checket 4 tal
(hvis vi f.eks. søgte efter 11).

Hvor mange tal kommer vi i værste tilfælde til
at checke, når L.length = n ?

Efter første check er der $\leq n/2$ elementer tilbage:



Efter andet check er der $\leq n/4$ elementer tilbage:



...

Efter i'te check er der $\leq n/2^i$ elementer tilbage.

Det sidste check foretages senest, når der er 1
element tilbage.

$$\frac{n}{2^i} \leq 1 \iff n \leq 2^i \iff \log_2 n \leq i$$

D.v.s. max # check: $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

Dermed er køretiden $O(\log n)$.

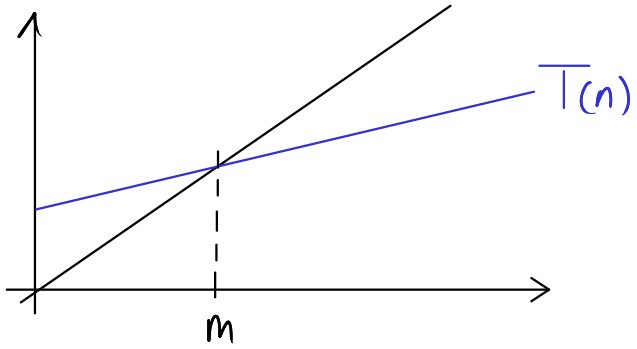
Bestemmelse af køretid

Vælg en karakteristisk operation op., sådan at algoritmens køretid er proportional med den samlede tid brugt på op.
I ovenstående eks. var op. sammenligning af elementer.

SequentialSearch laver højst n sammenligninger. Derfor er dens køretid $O(n)$. Det ville den også være, hvis algoritmen lavede $n/2$ eller $3n$ sammenligninger.

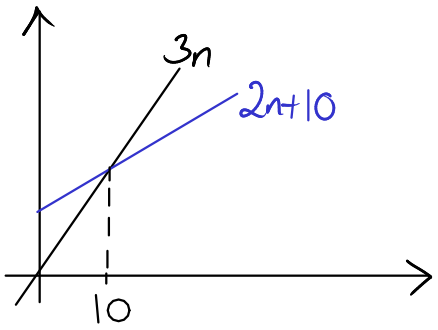
Definition:
$T(n) \in O(f(n))$, hvis der findes $k, m \in \mathbb{Z}$, så
$T(n) \leq k \cdot f(n)$, for alle $n \geq m$.

D.v.s. $T(n) \in O(n)$, hvis grafen for $T(n)$ fra et vist punkt ligger under en ret linie gennem $(0,0)$:



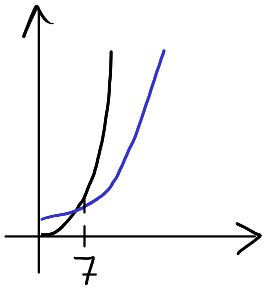
Eks: $2n+10 \in O(n)$:

$2n+10 \leq 3n$, for $n \geq 10$



Eks: $n^2/2 + 3n + 1 \in O(n^2)$:

$n^2/2 + 3n + 1 \leq n^2$, for $n \geq 7$



Eks: $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \in O(\log n)$:

$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \leq 2 \log_2 n$, for $n \geq 2$

Bemærk:

$\log_a(n) \in O(\log_b(n))$, hvis $a, b \in O(1)$

fordi:

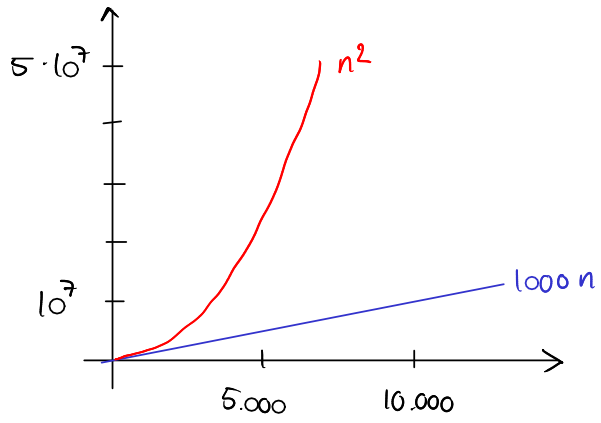
$$\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}, \text{ og}$$

$a, b \in O(1) \Rightarrow \log_b(a) \in O(1)$

Derfor skriver vi blot $O(\log n)$ i st. for $O(\log_2 n)$

Det, der betyder noget, er det <u>mest betydende</u> led, d.v.s. det der vokser hurtigst.
Man må altid fjerne mindre betydende led, og konstanter, der ganges på det mest betydende led.

<u>Eks:</u>



Hvis n er lille, bekymrer vi os ikke så meget om køretiden, men vælger blot den simpleste algoritme.
Hvis n er stor, er n^2 meget større end 1000 n.

<u>Eks:</u> #op. i sek: 10^9

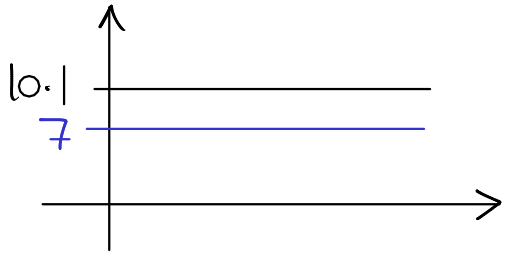
#op	n=100		n=10^6		n=10^9	
	#op.	tid	#op	tid	#op.	tid
$\lceil \log_2 n \rceil$	7	7 ns	20	20 ns	30	30 ns
n	100	100 ns	10^6	1 ms	10^9	1 s
n^2	10^6	1 ms	10^{12}	17 min	10^{18}	32 år

$10^9 \approx 30.000.000 \cdot 30$
D.v.s. om køretiden er $\frac{1}{2} \cdot n$ eller $10 \cdot n$ er relativt uvigtigt. Det, der betyder noget, er, om den er proportional med n eller log n.

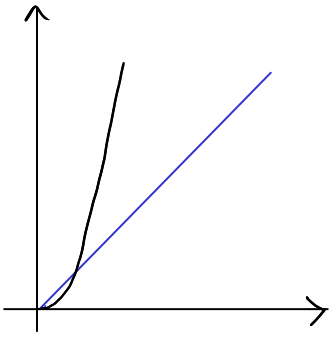
Ovenstående tabel angav, hvor lang tid det tager at løse et problem af en given størrelse v.h.a. en algoritme med en given køretid.
Nu vender vi det rundt: Givet en bestemt køretid, hvor stor en instans kan vi løse inden for den givne tid?
Vi antager stadig, at der kan udføres 10^9 op. i sek.
Problem-størrelserne nedenfor er angivet med et betydende ciffer.

#op. for input af str. n	1 ms	1 s	1 min	1 døgn	1 år
$\log_2 n$	$10^{300.000}$				
n	10^6	10^9		$9 \cdot 10^{13}$	
$n \log_2 n$	$8 \cdot 10^4$			$2 \cdot 10^{12}$	
n^2	10^3			$9 \cdot 10^6$	
n^3	10^2	10^3		$4 \cdot 10^4$	
2^n	20	30			55

Eks: $7 \in O(1)$



Eks: $n \in O(n^2)$



Eksempler på køretider:

1	konstant	
$\log(n)$	logaritmisk	
n	lineær	
$n \log(n)$		
n^2	kvadratisk	polynomiel
n^3		
n^{10}		
2^n	eksponentiel	
10^n		

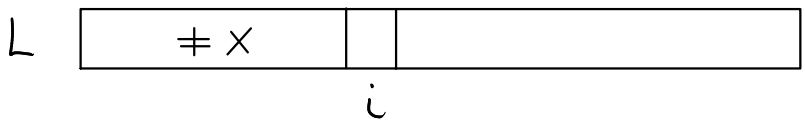
Korrekthed

Virker algoritmen, som du skal?
Til at bevise korrekthuden af en iterativ (eller rekursiv) algoritme kan man bruge en løkke-invariant.

Sequential Search (L, x)

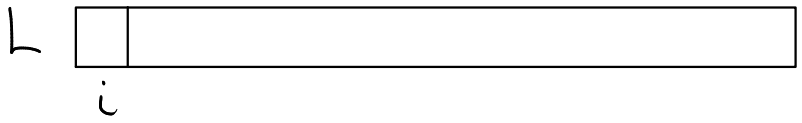
```
n := L.length
i := 1
While *I* i≤n and L[i] ≠ x
    i++
If i≤n
    Return i
Else
    Return „Not found"
```

Løkke-invariant I: $x \neq L[j]$, for $1 \leq j \leq i-1$



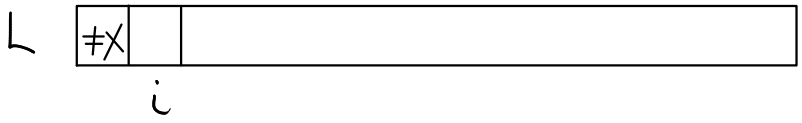
I er opfyldt, hver gang vi kommer til *I*, d.v.s. lige når vi skal til at checke betingelsen $i \leq n$ and $L[i] \neq x$.
Dette kan bevises v.h.a. induktion.

Første gang vi kommer til *I*:

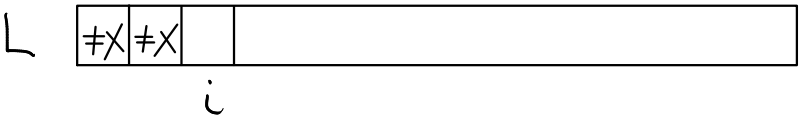


I siger, at der ikke er nogen elementer til venstre for plads i, som er lig med x.
Der er ingen elementer til venstre for plads i, så udsagnet er trivielt opfyldt.
Dette udgør basis-skridtet.

Derefter checker vi, om L[i] ≠ x.
Hvis det er tilfældet, inkrementeres i.
Nu har vi følgende situation:



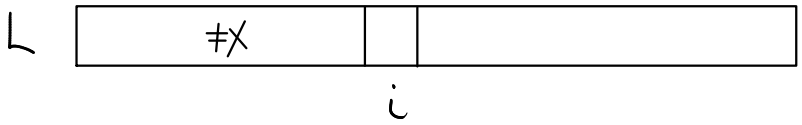
D.v.s. næste gang, vi kommer til *I*, er I igen opfyldt.
Hvis vi igen finder, at L[i] ≠ x, inkrementeres i endnu en gang. Nu har vi:



D.v.s. næste gang, vi kommer til *I*, er I igen opfyldt.
Og sådan kan vi fortsætte...

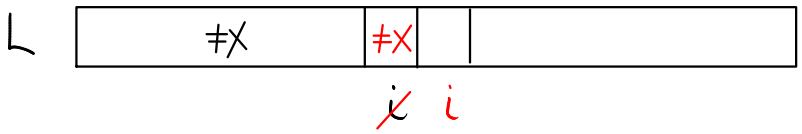
Generelt:

Antag, at I er opfyldt, når vi kommer til *I*:

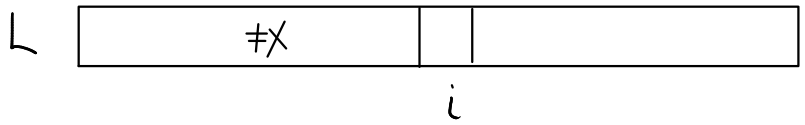


Dette er induktionsantagelsen.

Bemærk, at i kun bliver inkrementeret, hvis $L[i] \neq X$:



D.v.s. næste gang vi kommer til *I*, gælder I igen:



Dette udgør induktionsskridtet.

Afslutning:

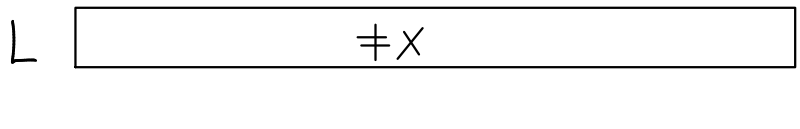
Når vi til sidst forlader while-løkken, skyldes det en af to ting:

- `L[i] = x`

  I dette tilfælde returneres i, og det er indeks til en plads i L, hvor man kan finde x.
  D.v.s. korrekt output i dette tilfælde.

- `i = n+1`

  I dette tilfælde returneres „Not found".
  Da $i > n$, følger det af I, at x ikke findes i L.



D.v.s. også korrekt output i dette tilfælde.

Binary Search (L , x)

$l := 1$, $r := L.length$, $m := \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

While *I* $l \leq r$ and $L[m] \neq x$

    If $x < L[m]$

        $r := m - 1$

    Else

        $l := m + 1$

    $m := \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

If $l \geq r$

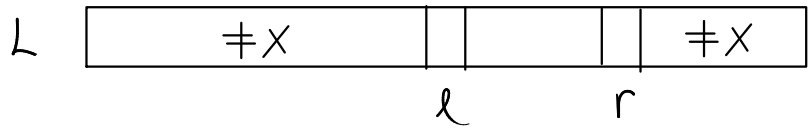
    Return m

Else

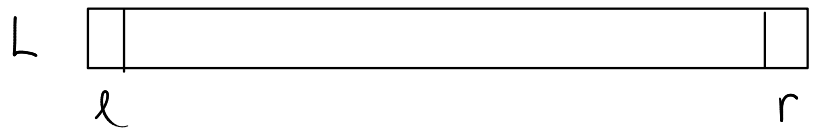
    Return „Not found"

Invariant I:

Hvis x findes i L, findes den i $L[l..r]$:

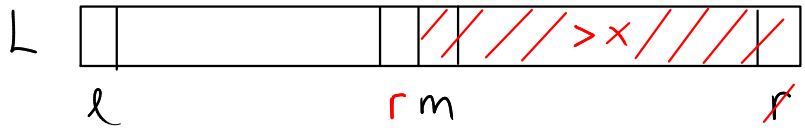


Første gang vi kommer til *I*, er det trivielt sandt:



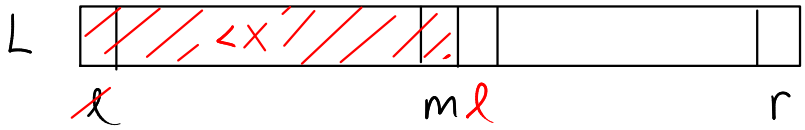
Derefter checker vi, om $x \neq L[m]$.
Hvis det er tilfældet er der to muligheder:

- $x < L[m]$
  I dette tilfælde opdateres r:



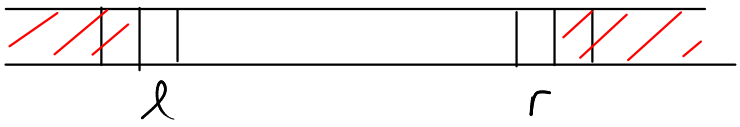
  Herefter er I stadig opfyldt

- $x > L[m]$
  I dette tilfælde opdateres l:

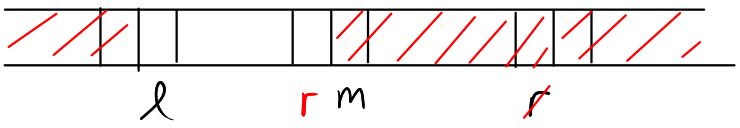


  Herefter er I stadig opfyldt

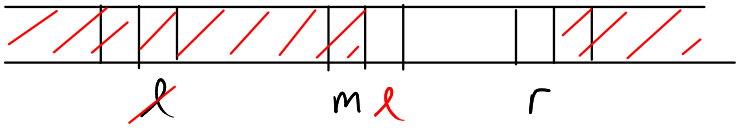
Generelt:
Lige inden vi checker $l \leq r$ and $L[m] \neq x$, gælder I:



Efter gennemløb af løkken gælder I stadig:



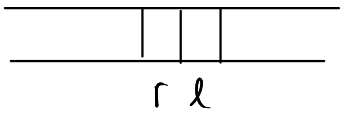
eller



Når vi til sidst forlader while-løkken, skyldes det en af to ting:

- `L[m] = X`
  I dette tilfælde returneres i, og det er indeks til en plads i L, hvor man kan finde X.
  D.v.s. korrekt output i dette tilfælde.

- `l > r`
  I dette tilfælde returneres „Not found".
  Da `l > r`, er `L[l..r]` tomt:



  Dermed følger det af I, at x ikke findes i L.
  D.v.s. også i dette tilfælde korrekt output.

De to algoritmer er iterative, d.v.s. det meste af arbejdet foregår i en (while-)løkke.
Kunne også skrives som rekursive algoritmer, d.v.s. algoritmer, som kalder sig selv.

SeqSearchRec(L, x, l, n)
If $l \leq n$
    If $L[l] = x$
        Return l
    Else
        Return SeqSearchRec(L, x, l+1, n)
Else
    Return „Not found"

BinarySearchRec(L, x, l, r)
If $l \leq r$
    $m := \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$
    If $L[m] = x$
        Return m
    Else if $x < L[m]$
        Return BinarySearchRec(L, x, l, m-1)
    Else
        Return BinarySearchRec(L, x, m+1, r)
Else
    Return „Not found"

Eks : $X = 10$

$L =$

7	9	10	3	2	8

SeqSearchRec(L, 10, 1, 6)

```
If 1 ≤ 6
   If L[1] = 10
      Return 1
   Else
      Return SeqSearchRec(L, 10, 2, 6)
Else
   Return „Not found"
```

```
If 2 ≤ 6
   If L[2] = 10
      Return 2
   Else
      Return SeqSearchRec(L, 10, 3, 6)
Else
   Return „Not found"
```

```
If 3 ≤ 6
   If L[3] = 10
      Return 3
   Else
      Return SeqSearchRec(L, 10, 4, 6)
Else
   Return „Not found"
```

...