ALGORITMER

Formålet med denne note er at give en introduktion til:

Algoritmer

- Specifikation, f.eks. v.h.a. pseudokode
- Analyse
    - Køretid, v.h.a. asymptotisk notation
    - Korrekthed, f.eks. v.h.a. løkke-invarianter

Dette emne er et uddrag af kurset
DM507 – Algoritmer og Datastrukturer
som ligger på 2. semester (d.v.s. i foråret 2021)
og undervises af Rolf Fagerberg

En algoritme er en „opskrift" på, hvordan man løser et givet problem.

Mere formelt (Fra Computer Science: An Overview
Brookshear, Brylow):

> An algorithm is an ordered set of unambiguous, executable steps that define a terminating process.

Til at beskrive algoritmer er det nyttigt at bruge pseudokode:
„Høj-niveau sprog", hvor man bruger keywords, som i programmerings-sprog, men også almindelig tekst.

Eks:

Søg efter et element x i en liste L

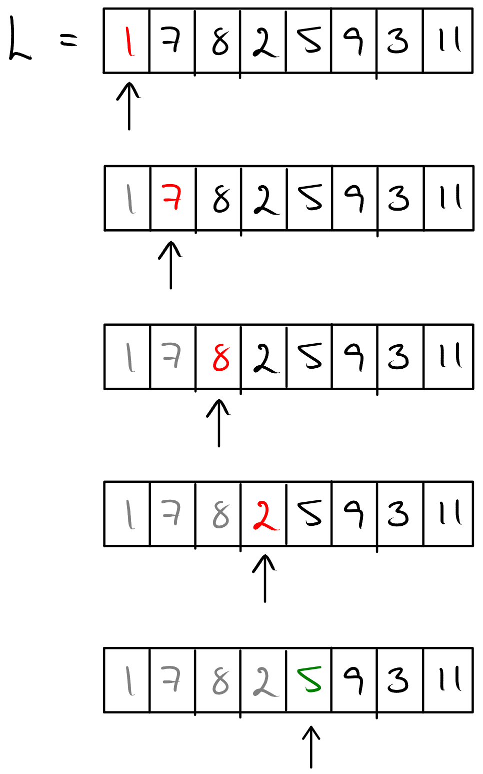
Kan gøres v.h.a. sekventiel søgning (også kaldet lineær søgning):

```
SequentialSearch (L, x)
n := L.length
i := 1
While i ≤ n and L[i] ≠ x
    i++
If i ≤ n
    Return i
Else
    Return „Not found"
```

Er dette en algoritme?

Ordered, unambiguous, executable, terminating?

Eks: $L = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 7 & 8 & 2 & 5 & 9 & 3 & 11 \\ \hline\end{array}, \quad x = 5$



x og samtlige elementer til venstre for x checkes.
Hvis x ikke findes i L, checkes alle elementer i L.

Bemærk, at den samlede køretid er proportional med #check.
Derfor siger vi, at køretiden er $O(n)$.

O-notationen giver en øvre grænse for „størrelses-ordenen" af køretiden.

Hvis L er sorteret, kan det gøres mere effektivt v.h.a. binær søgning:

Eks: L =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

, $x = 10$

L =

	l							m							r
L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
								↑							

Check midtuste element

$x > 8$, så vi fortsætter søgningen til højre for 8:

									l			m			r
L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
								↑				↑			

$x < 12$

									l	m	r				
L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
								↑		↑		↑			

```
Binary Search (L, x)
$l := 1$, $r := L.length$, $m := \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$
While $l \leq r$ and $L[m] \neq x$
    If $x < L[m]$
        $r := m - 1$
    Else
        $l := m + 1$
    $m := \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$
If $l \leq r$
    Return m
Else
    Return „Not found"
```

Eks: L =

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

, $x = 10{,}5$

	l							m							r
L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

									l			m			r
L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

									l	m	r				
L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

											l m r				
L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

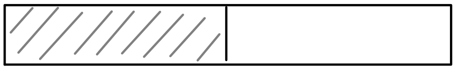
										m r	l				
L =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$r < l \Rightarrow$ „Not found“

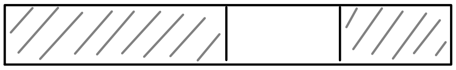
I eksemplerne ovenfor checkede vi h.h.v. 3 og 4 tal ud af 15. Bemærk, at 4 er worst-case.

Hvor mange tal kommer vi i værste tilfælde til at checke, når L.length = n ?

Efter første check er der $\leq n/2$ elementer tilbage:



Efter andet check er der $\leq n/4$ elementer tilbage:



...

Efter i'te check er der $\leq n/2^i$ elementer tilbage.

Det sidste check foretages senest, når der er 1 element tilbage.

$$\frac{n}{2^i} < 1 \iff n < 2^i \iff \log_2 n < i$$

D.v.s. max # check : $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

Dermed er køretiden $O(\log n)$.

Bestemmelse af køretid

Vælg en karakteristiske operation op., sådan at algoritmens køretid er proportional med den samlede tid brugt på op.
I ovenstående eks. var op. sammenligning af elementer.

SequentialSearch laver højst n sammenligninger. Derfor er dens køretid $O(n)$. Det ville den også være, hvis algoritmen lavede $n/2$ eller $3n$ sammenligninger.

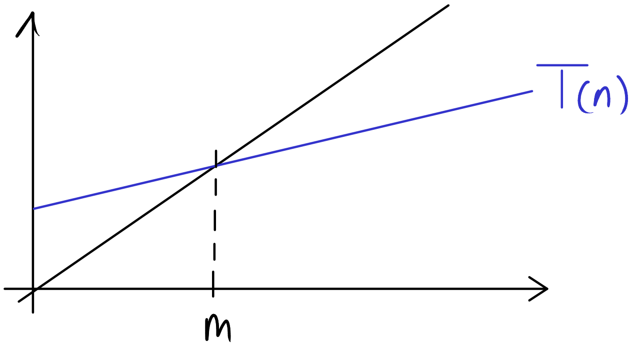
Definition:

$T(n) \in O(f(n))$, hvis der findes $k, m \in \mathbb{Z}$, så
$$T(n) \leq k \cdot f(n), \text{ for alle } n \geq m.$$

Eller:

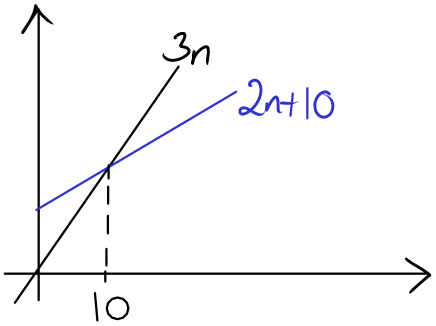
$$T(n) \in O(f(n))$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists k, m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq m : T(n) \leq k \cdot f(n)$$

D.v.s. $T(n) \in O(n)$, hvis grafen for $T(n)$ fra et vist punkt ligger under en ret linie gennem $(0,0)$:



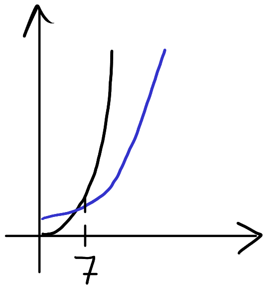
Eks: $2n+10 \in O(n)$:

$$2n+10 \le 3n, \text{ for } n \ge 10$$



Eks: $n^2/2 + 3n + 1 \in O(n^2)$:

$$n^2/2 + 3n + 1 \le n^2, \text{ for } n \ge 7$$



Eks: $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \in O(\log n)$:

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \le 2 \log_2 n, \text{ for } n \ge 2$$

Bemærk:

$\log_a(n) \in O(\log_b(n))$, hvis $a, b \in O(1)$

fordi:

$$\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}, \text{ og}$$

$$a, b \in O(1) \Rightarrow \log_b(a) \in O(1)$$

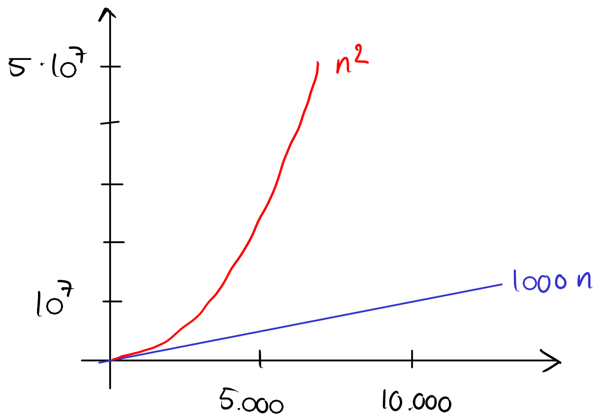
Derfor skriver vi blot $O(\log n)$ i st. for $O(\log_2 n)$

Eks: $a = 2$, $b = 10$.

$$\log_2(n) = \frac{\log_{10}(n)}{\log_{10}(2)} \approx \frac{\log_{10}(n)}{0{,}3} \approx 3{,}3 \cdot \log_{10}(n)$$

Det, der betyder noget, er det mest betydende led, d.v.s. det der vokser hurtigst.
Man må altid fjerne mindre betydende led, og konstanter, der ganges på det mest betydende led.

Eks:



Hvis n er lille, bekymrer vi os ikke så meget om køretiden, men vælger blot den simpleste algoritme.
Hvis n er stor, er n^2 meget større end 1000 n.

Eks: #op. i sek: 10^9

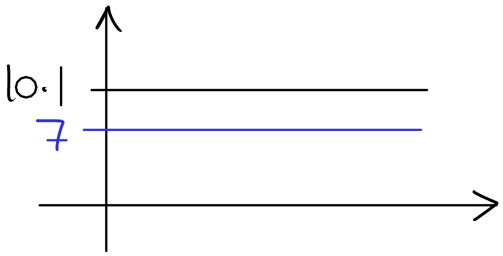
#op	n=100		n=10^6		n=10^9	
	#op.	tid	#op	tid	#op.	tid
$\lceil \log_2 n \rceil$	7	7 ns	20	20 ns	30	30 ns
n	100	100 ns	10^6	1 ms	10^9	1 s
n^2	10.000	10 µs	10^{12}	17 min	10^{18}	32 år

$10^9 \approx$ 30.000.000 · 30
D.v.s. om køretiden er $\frac{1}{2} \cdot n$ eller $10 \cdot n$ er relativt uvigtigt. Det, der betyder noget, er, om den er proportional med n eller log n.

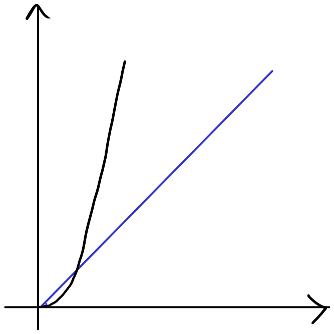
Ovenstående tabel angav, hvor lang tid det tager at løse et problem af en given størrelse v.h.a. en algoritme med en given køretid.
Nu vender vi det rundt: Givet en bestemt køretid, hvor stor en instans kan vi løse inden for den givne tid?
Vi antager stadig, at der kan udføres 10^9 op. i sek.
Problem-størrelserne nedenfor er angivet med et betydende ciffer.

#op. for input af str. n	1 ms	1 s	1 min	1 døgn	1 år
$\log_2 n$	$10^{300.000}$				
n	10^6	10^9		$9 \cdot 10^{13}$	
$n \log_2 n$	$6 \cdot 10^4$			$2 \cdot 10^{12}$	
n^2	10^3			$9 \cdot 10^6$	
n^3	10^2	10^3		$4 \cdot 10^4$	
2^n	20	30			55

Eks: $7 \in O(1)$



Eks: $n \in O(n^2)$



Eksempler på køretider:

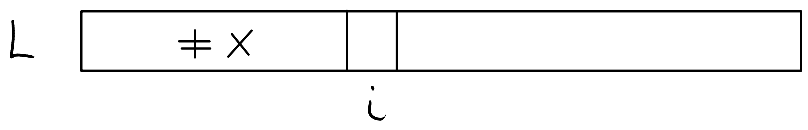
1	konstant	
$\log(n)$	logaritmisk	
n	lineær	
$n \log(n)$		
n^2	kvadratisk	polynomiel
n^3		
n^{10}		
2^n		eksponentiel
10^n		

Korrekthed

Virker algoritmen, som du skal?
Til at bevise korrektheden af en iterativ (eller rekursiv) algoritme kan man bruge en løkke-invariant.

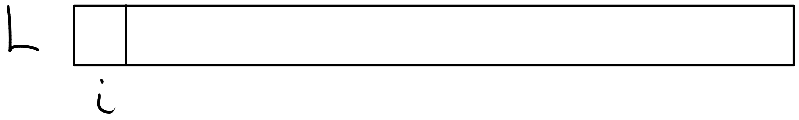
```
SequentialSearch(L, x)
n := L.length
i := 1
While *I* $i \le n$ and $L[i] \neq x$
    i++
If $i \le n$
    Return i
Else
    Return „Not found"
```

Løkke-invariant I: $x \neq L[j]$, for $1 \le j \le i-1$



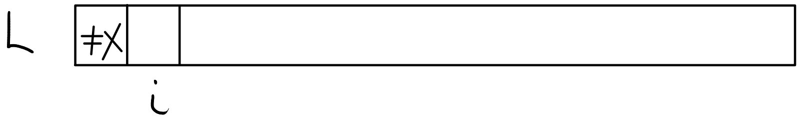
I er opfyldt, hver gang vi kommer til *I*, d.v.s. lige når vi skal til at checke betingelsen $i \le n$ and $L[i] \neq x$.
Dette kan bevises v.h.a. induktion.

Første gang vi kommer til *I*:

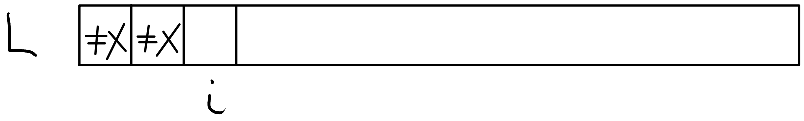


I siger, at der ikke er nogen elementer til venstre for plads i, som er lig med x.
Der er ingen elementer til venstre for plads i, så udsagnet er trivielt opfyldt.
Dette udgør basis-skridtet.

Derefter checker vi, om $L[i] \neq x$.
Hvis det er tilfældet, inkrementeres i.
Nu har vi følgende situation:



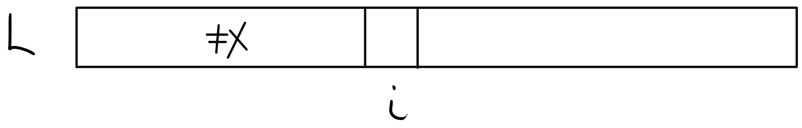
D.v.s. næste gang, vi kommer til *I*, er I igen opfyldt.
Hvis vi igen finder, at $L[i] \neq x$, inkrementeres i endnu en gang. Nu har vi:



D.v.s. næste gang, vi kommer til *I*, er I igen opfyldt.
Og sådan kan vi fortsætte...

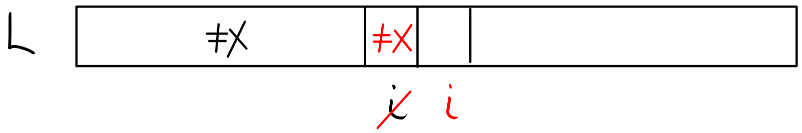
Generelt:

Antag, at I er opfyldt, når vi kommer til $*I*$:

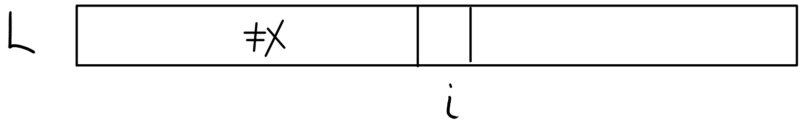


Dette er induktionsantagelsen.

Bemærk, at i kun bliver inkrementeret, hvis $L[i] \neq X$:



D.v.s. næste gang vi kommer til $*I*$, gælder I igen:



Dette udgør induktionsskridtet.

D.v.s. i induktionsskridtet viser vi:

Hvis I gjaldt, sidst vi var ved I,
så gælder den også denne gang.

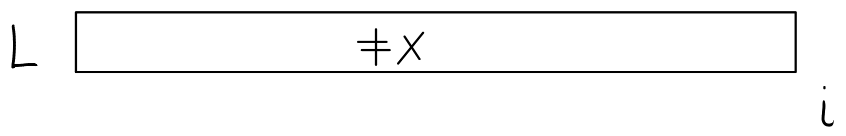
Afslutning:

Når vi til sidst forlader while-løkken, skyldes det en af to ting:

- $i = n+1$

  I dette tilfælde returneres „Not found".

  Da $i > n$, følger det af I, at x ikke findes i L.

  D.v.s. korrekt output i dette tilfælde.

- $L[i] = x$

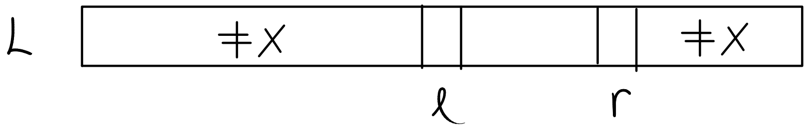
  I dette tilfælde returneres i, og det er indeks til en plads i L, hvor man kan finde x.

  D.v.s. også korrekt output i dette tilfælde.

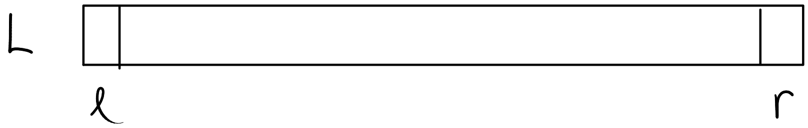
```
Binary Search ( L , x )
$l := 1$ ,   $r := L.\text{length}$ ,   $m := \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$
While *I* $l \le r$ and $L[m] \ne x$
    If $x < L[m]$
        $r := m-1$
    Else
        $l := m+1$
    $m := \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$
If $l \le r$
    Return m
Else
    Return „Not found"
```

Invariant I:

Hvis x findes i L, findes den i $L[l..r]$:



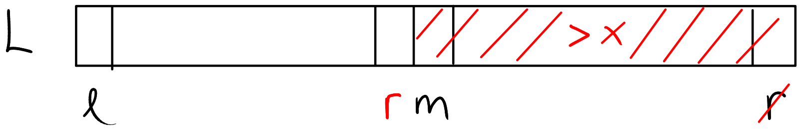
Første gang vi kommer til *I*, er det trivielt sandt:



Derefter checker vi, om $x \neq L[m]$.
Hvis det er tilfældet er der to muligheder:

- $x < L[m]$

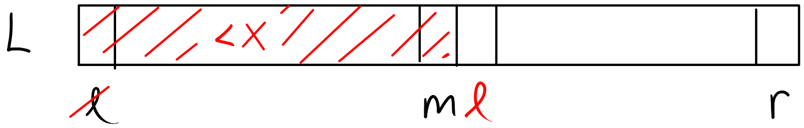
  I dette tilfælde opdateres r:



  Herefter er I stadig opfyldt

- $x > L[m]$

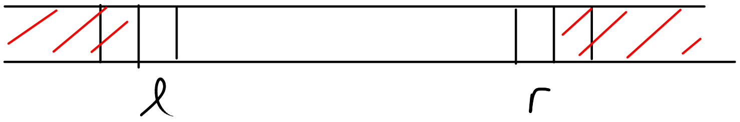
  I dette tilfælde opdateres ℓ:



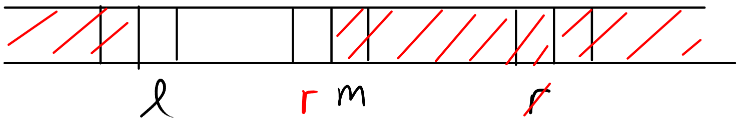
  Herefter er I stadig opfyldt

Generelt:

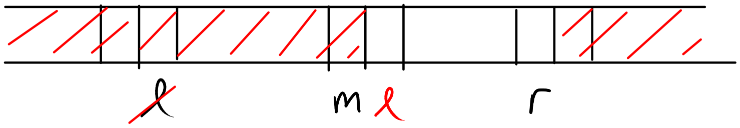
Lige inden vi checker $\ell \leq r$ and $L[m] \neq x$,
gælder I:



Efter gennemløb af løkken gælder I stadig:



eller

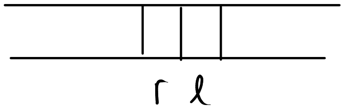


Når vi til sidst forlader while-løkken, skyldes det en af to ting:

- $l > r$

  I dette tilfælde returneres „Not found".

  Da $l > r$, er $L[l..r]$ tomt:

  Dermed følger det af I, at x ikke findes i L.

  D.v.s. korrekt output i dette tilfælde.

- $L[m] = x$

  I dette tilfælde returneres i, og det er indeks til en plads i L, hvor man kan finde x.

  D.v.s. også i dette tilfælde korrekt output.

De to algoritmer er iterative, d.v.s. det meste af arbejdet foregår i en (while-)løkke.
De kunne også skrives som rekursive algoritmer, d.v.s. algoritmer, som kalder sig selv:

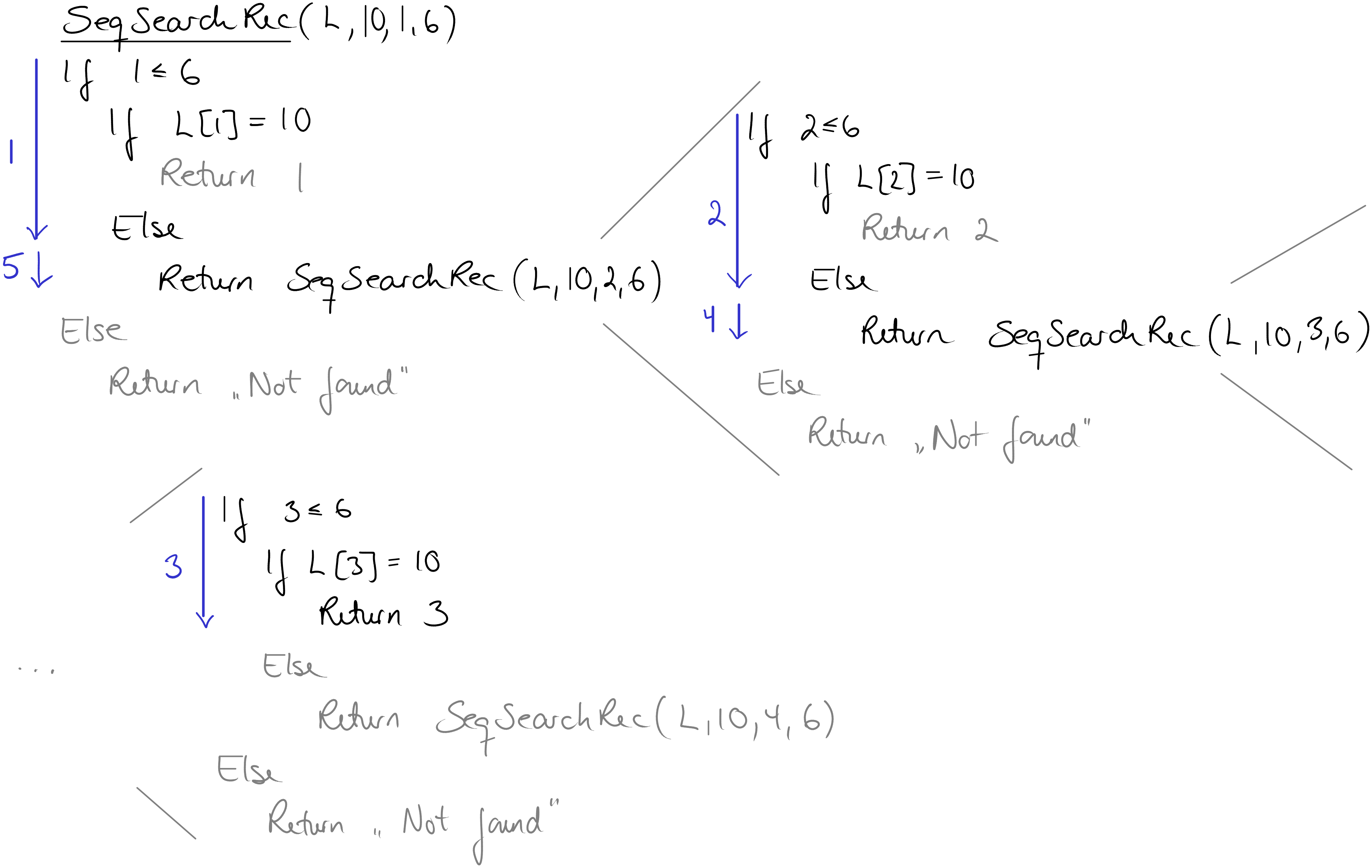
```
SeqSearchRec(L, x, ℓ, n)
If ℓ ≤ n
    If L[ℓ] = x
        Return ℓ
    Else
        Return SeqSearchRec(L, x, ℓ+1, n)
Else
    Return „Not found"
```

```
BinarySearchRec(L, x, ℓ, r)
If ℓ ≤ r
    m := ⌊(ℓ+r)/2⌋
    If L[m] = x
        Return m
    Else if x < L[m]
        Return BinarySearchRec(L, x, ℓ, m-1)
    Else
        Return BinarySearchRec(L, x, m+1, r)
Else
    Return „Not Found"
```

Eks : $X = 10$

L =

7	9	10	3	2	8



```
SeqSearchRec(L, 10, 1, 6)
If  1 ≤ 6
    If  L[1] = 10
        Return  1
    Else
        Return  SeqSearchRec(L, 10, 2, 6)
Else
    Return „Not found"
```

```
If  2 ≤ 6
    If  L[2] = 10
        Return  2
    Else
        Return  SeqSearchRec(L, 10, 3, 6)
Else
    Return „Not found"
```

```
If  3 ≤ 6
    If  L[3] = 10
        Return  3
    Else
        Return  SeqSearchRec(L, 10, 4, 6)
Else
    Return „Not found"
```

...