Kilder til matematikkens historie

Redigeret af

Jesper Lützen og *Kurt Ramskov*

Anden udgave

Matematisk Afdeling, Københavns Universitet 1999

Kilder til matematikkens historie
2. udgave 1999

Sat med Computer Modern Fonte ved hjælp af LaTeX 2_ε.
Trykt af Universitetsbogladen, København.

ISBN 87-91180-10-4

Indhold

Forord		iii
Tekst 1:	Regning hos babylonerne	1
Tekst 2:	Babylonske andengradsligninger	2
Tekst 3:	Babylonske grøftegravningsopgaver	3
Tekst 4:	Babylonernes geometri	5
Tekst 5:	Euklid om antallet af primtal	6
Tekst 6:	Euklid om det elliptiske fladeanlæg	7
Tekst 7:	Diskussionen af geometrisk algebra	10
Tekst 8:	Exhaustionsmetoden	18
Tekst 9:	Arkimedes om sin metode	22
Tekst 10:	Den kinesiske restklassesætning	26
Tekst 11:	Kineserne om ligningssystemer	28
Tekst 12:	Inkaernes quipu	33
Tekst 13:	Al-Khwārizmī om 2. gradsligninger	36
Tekst 14:	Isidore om matematik	42
Tekst 15:	Oresme om grafisk fremstilling	49
Tekst 16:	Cardano om komplekse tal	53
Tekst 17:	Regiomontanus om sfæriske trekanter	56
Tekst 18:	Oluffssøn om regning på linier	60
Tekst 19:	Pascal om hasardspil	67
Tekst 20:	Descartes om regning med liniestykker	69
Tekst 21:	Descartes om Pappus' problem	71
Tekst 22:	Wallis om imaginære tal	76

Tekst 23:	**Roberval og Pascal om indivisibler**	**81**
Tekst 24:	**Newtons fluxionsteori**	**84**
Tekst 25:	**Leibniz' metode**	**90**
Tekst 26:	**Berkeley om analysens grundlag**	**95**
Tekst 27:	**Eulers formler**	**99**
Tekst 28:	**Euler om algebraens fundamentalsætning**	**101**
Tekst 29:	**Gauss om regulære polygoner**	**108**
Tekst 30:	**Fourier om trigonometriske rækker**	**110**
Tekst 31:	**Cauchy om rækker**	**115**
Tekst 32:	**Abel om uendelige rækker**	**120**
Tekst 33:	**Legendre om parallelpostulatet**	**123**
Tekst 34:	**Lobachevski om parallelle linier**	**126**
Tekst 35:	**Boole om logik**	**132**
Tekst 36:	**Dedekind om irrationale tal**	**140**
Litteraturliste		**146**

Forord

Dette hæfte indeholder korte uddrag af matematiske kildetekster spredt over tidsperioden fra ca. 1800 f.Kr. til omkring 1872. En undtagelse er dog tekst 7, der består af uddrag fra den sekundære litteratur. Til hver tekst er givet en kort introduktion, der bl.a. nævner forfatteren samt hvorfra teksten er taget (via en henvisning til litteraturlisten bagest). Desuden er der stillet nogle spørgsmål, hvis formål er at lede læseren på sporet af tekstens betydning i matematikkens historie. Disse introduktioner, samt kommentarer indføjet af redaktørerne, er alle sat i samme skrifttype som forordet, mens selve teksterne er sat i sin egen skrifttype.

Teksterne er udvalgt på grundlag af en række kriterier.

1. De skulle så vidt muligt være centrale kilder til matematikkens historie.

2. De skulle have en eller flere klare historiske pointer.

3. De skulle være forholdsvis korte. Dette er i flere tilfælde opnået ved at klippe i teksterne, hvilket desværre kan give et lidt forvrænget billede af den originale kildetekst som helhed.

4. De skulle være oversat til dansk eller engelsk. I enkelte tilfælde eksisterede en oversættelse til et af disse sprog ikke og da er oversættelsen lavet af redaktørerne.

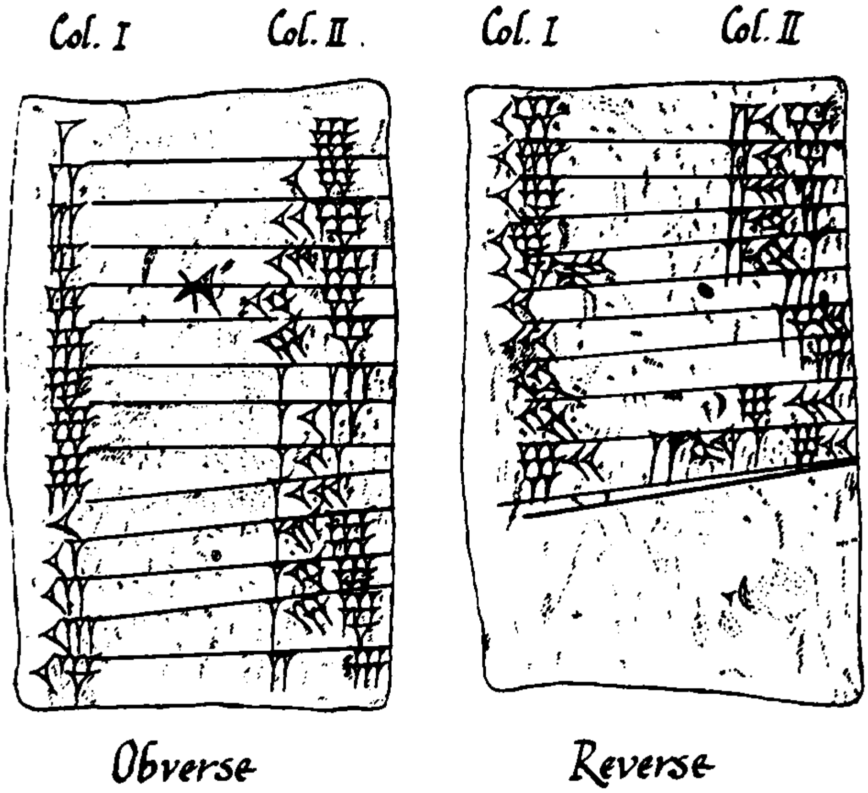
Kildesamlingen er lavet med henblik på undervisningen i kurset *Matematikkens historie* ved Matematisk Afdeling, Københavns Universitet. I dette kursus benyttes desuden lærebogen [Katz 1993; 1998] og for at få tilstrækkeligt udbytte af kildesamlingen er det nødvendigt med en generel viden om teksternes placering i matematikkens historie, hvilket denne lærebog kan give.

Udgangspunktet for kildesamlingen var de tekster som var udvalgt af Jesper Lützen og som havde været anvendt en årrække på *Matematik 3MH* indtil 1995. Som en følge af en studierevision måtte kurset ændres fra 1997. Da blev lærebogen udskiftet til [Katz 1993] ligesom udvalget af kilder blev ændret. Nærværende kildesamling er en revideret udgave af disse tidligere benyttede kildesamlinger udarbejdet af Kurt Ramskov med henblik på afholdelsen af *Matematik 3MH* i foråret 1998. I 2. udgaven er der foretaget en større ændring af tekst 10. Teksterne 21 og 22 er ombyttede og tekst 29 er udskiftet med en ny Gauss-tekst. Desuden er der lavet mindre ændringer en del steder, specielt i spørgsmålene, og småfejl er rettet. Henvisningerne til Katzs lærebog er nu både til 1. udgaven [Katz 1993] og til 2. udgaven [Katz 1998].

Jesper Lützen & Kurt Ramskov
Matematisk Afdeling, Københavns Universitet
Januar 1999

Tekst 1: Regning hos babylonerne

Denne øvelse har til formål at kaste lys på, hvordan babylonerne udførte de fire elementære regneoperationer. Ud fra kilderne kan man ikke se, hvordan addition og subtraktion blev udført. Måske skete det ved hjælp af en form for regnebræt.



a) Forklar indholdet på ovenstående gammelbabylonske lertavle fra omkring 1800 f.Kr. Den er kopieret fra [Aaboe 1966, p. 3].

b) Der er fundet mange eksempler på lertavler med nedenstående tabel, som er angivet med de babylonske taltegn direkte oversat til vort talsystem, dvs. uden noget forsøg på fortolkning. Babylonernes 60-talspositionssystem havde længe ikke et symbol for nul og intet sexigesimalkomma til at adskille heltal og brøkdel. Giv en forklaring på tabellen ved at placere passende underforståede sexigesimalkommaer (brug ;) og nuller.

I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
2	30	9	6,40	20	3	36	1,40	1	1
3	20	10	6	24	2,30	40	1,30	1,4	56,15
4	15	12	5	25	2,24	45	1,20	1,12	50
5	12	15	4	27	2,13,20	48	1,15	1,15	48
6	10	16	3,45	30	2	50	1,12	1,20	45
8	7,30	18	3,20	32	1,52,30	54	1,6,40	1,21	44,26,40

c) I tabellen ovenfor mangler en del tal i kolonne I, bl.a. 7 og 11. Har du en forklaring på, hvorfor netop de angivne tal blev medtaget? Kan du give en generel karakteristik af de tal som mangles (eller dem som er medtaget) i kolonne I?

d) Diskuter, hvordan man kan bruge tabellen under punkt b) sammen med en samling gangetabeller til at udføre divisionen a/b.

e) Nogle af de babylonske tavler indeholder en samling af gangetabeller. Hvilke gangetabeller tror du indgik heri?

Tekst 2: Babylonske andengradsligninger

Der er fundet en del babylonske lertavler med opgaver som vi kan oversætte til andengradsligninger. De tre nedenstående opgaver fra lertavlen BM 13901 (BM = British Museum) er eksempler herpå. Tavlen indeholder ialt 24 opgaver og skønnes at være gammelbabylonsk, dvs. fra omkring 1800 f.Kr. Opgaverne er her gengivet efter [Andersen 1986, pp. 39–40].

Tekst i [ ] markerer ulæselige dele af tavlen, hvis indhold er rekonstrueret ud fra sammenhængen, mens () er tekst der er tilføjet ved oversættelsen for at gøre læsningen lettere.

a) Opskriv med moderne symbolik, hvilke andengradsligninger, der er tale om i de tre opgaver, og angiv den løsningsformel, som du ville anvende. Hvordan stemmer dette med løsningsalgoritmen på tavlerne? Hvilken variabelsubstitution anvendes i den sidste opgave?

b) Marker i den tredje opgave den del af teksten som er rekonstrueret af oversætteren fx ved at bruge en farvet markeringstusch. Diskuter hvordan oversætteren har været i stand til at rekonstruere teksten.

(Oversættelse af BM 13901)
(Opgave 1)

Fladen og kvadratet(s side) har jeg adde[ret] og 0;45 er det.
Tag 1, koefficienten.
Halvdelen (af) 1 brækker du af.
[0;3]0 og 0;30 multiplicerer du.
Du føjer 0;15 til 0;45, og 1 har 1 som kvadratrod.
0;30, som du har multipliceret (med sig selv), trækker du fra 1,
og 0;30 er kvadratet(s side).

(Opgave 2)

(Siden i) kvadratet har jeg subtraheret fra fladen, og 14,30 er det.
1, koefficienten, tager du. Halvdelen (af) 1 brækker du af.
0;30 og 0;30 multiplicerer du
0;15 til [14,30 føjer du] og 14,30;15 har 29;30 som kvadratrod.
0;30 som du har multipliceret (med sig selv) føjer du til 29;30,
og 30 er kvadratet(s side).

(Opgave 7)

[Det syvdobbelte af (siden i) kvadratet og det] ellevedobbelte af fladen [har jeg adderet, og 6;15 (er det). 7 og 11] tager [du], 11 [multiplicerer du med 6;15 og 1,8;45 (er det). Halvdelen (af) 7] brækker [du] af. 3;30 og 3;30 [multiplicerer du, 12;15 føjer du til 1,8;45], og [1,21 har 9 som kvadratrod. 3,30], som [du har multipliceret (med sig selv)], subtraherer du fra 9, [og 5;30 tager du. Det reciprokke af 1]1 går ikke. [Hvad skal jeg tage sammen med 11 for at få 5;30]? [0;30 (er) faktoren. 0;30 (er) kva]dratet(s side).

Tekst 3: Babylonske grøftegravningsopgaver

En del babylonske lertavler indeholder grøftegravningsopgaver. Denne type opgaver kan man finde i flere elementære regnebøger helt op i det 20. århundrede. Nedenfor angives den syvende opgave på den gammelbabylonske lertavle YBC 4663 (YBC = Yale Babylonian Collection, dvs. samlingen på Yale University) efter [Neugebauer & Sachs 1945, pp. 70–71].

Tekst i [ ] markerer ulæselige dele af tavlen, hvis indhold er rekonstrueret ud fra sammenhængen, mens () er tekst der er tilføjet ved oversættelsen for at gøre læsningen lettere. Bemærk, at på de steder, hvor der i teksten står $\frac{1}{2}$ er tallet på lertavlen ikke angivet i sexigesimalsystemet, men der er benyttet et specielt tegn for $\frac{1}{2}$.

Til hjælp ved læsningen skal bemærkes, at en ki-lá er en kasseformet grøft (eller jordvold) og at *tildelingen* er den mængde jord én arbejder kan grave op om dagen. I den første del af teksten bruges følgende enheder (se [Neugebauer & Sachs 1945, pp. 4–6]):

Mønt/vægt:	1 gín = 3,0 še = 180 še	$\approx$ 80 gram sølv
Længde:	1 GAR = 12 kuš	$\approx$ 6 meter
Volumen:	1 SAR = 1 GAR^2 $\cdot$ kuš = 60 gín	$\approx$ 18 m^3.

De bekendte er dybden, tildelingen, daglønnen pr. mand, de totale udgifter og summen af bredden x og længden y.

I linie 3 og 4 udregnes, hvor mange mand-dage der skal til at grave grøften ved:

$$\text{Antal mand-dage} = \frac{9 \text{ gín}}{6 \text{ še}} = \frac{9 \text{ gín}}{0;2 \text{ gín}} = 4,30.$$

I linie 5 multipliceres dette med tildelingen, hvorved fås grøftens volumen V:

$$V = 4,30 \cdot 10 \text{ gín} = 45,0 \text{ gín} = 45 \text{ SAR}.$$

Derefter divideres denne med dybden $d = \frac{1}{2}$ GAR, så man får grøftens grundflade A til:

$$A = \frac{V}{d} = \frac{45 \text{ SAR}}{\frac{1}{2} \text{ GAR}} = \frac{45 \text{ SAR}}{6 \text{ kuš}} = 7;30 \text{ GAR}^2.$$

a) Læs teksten.

b) Vis, at babylonieren fra og med linie 7 til og med linie 12 løser hvad der moderne svarer til ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= a = 7;30 \\ x + y &= b = 6;30. \end{aligned}$$

Angiv, hvordan du ville løse ligningssystemet og sammenlign med babylonierens metode.

c) Kunne opgaven være kommet fra et praktisk problem? Diskuter anvendelses-orientering og abstraktion i babylonsk matematik på grundlag af opgaven og de foregående kildetekster.

1. 9 (gín) er de (totale udgifter i) sølv til en ki-lá. Jeg adderede længden og bredden, og (resultatet er) 6;30 (GAR). $\frac{1}{2}$ GAR er [dens dybde],
2. 10 gín (volumen) er tildelingen, 6 še (sølv) er daglønnen. Hvad er længden (og) dens bredde?
3. Når du udfører (udregningerne), tag det reciprokke af daglønnen,
4. multiplicer med 9 gín, den (totale udgift i) sølv, og du vil få 4,30.
5. Multiplicer 4,30 med tildelingen (og) du vil få 45.
6. Tag det reciprokke af dens dybde, multiplicer med 45 (og) du vil få 7;30.
7. Halver længden og bredden, som jeg har lagt sammen, (og) du vil få 3;15.
8. Kvadrer 3;15 (og) du vil få 10;33,45.

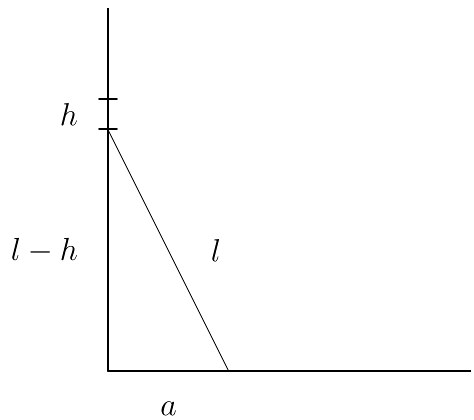
9. Træk 7;30 fra 10;33,45, (og)
10. du vil få 3;3,45. Tag dens kvadratrod, (og)
11. du vil få 1;45. Adder dette til den ene og subtraher det fra den anden, (og)
12. du vil få længden (og) bredden. 5 (GAR) er længden; $1\frac{1}{2}$ er bredden.

Tekst 4: Babylonernes geometri

Flere af de babylonske lertavler afslører, at babylonerne havde kendskab til forskellige geometriske resultater. Lertavlen BM 85196 (BM = British Museum) indeholder fx en opgave om en bjælke, der står op ad en mur, men som for neden er gledet lidt ud fra muren (se figuren nedenfor). Teksten er fra [Neugebauer 1935, pp. 47–48].

a) Hvad søges i opgaven?

b) Opskriv beregningerne udtrykt ved de variable på figuren nedenfor. Hvilken vigtig geometrisk sætning anvendes? At babylonerne kendte denne sætning er også dokumenteret på flere andre lertavler.



En bjælke(?) [. . .] Foroven er den 0;6 reduceret, for [nede]n [hvad er den gledet ud?] Du: kvadrer 0;30, 0;15 vil du få. 0;6 fra 0;30 [fratrukket, 0;24 vil du få.] Kvadrer 0;24, 0;9,36 vil du få. 0;9,36 [trækkes fra 0;15]. 0;5,24 vil du få. Hvad (har) 0;5,24 (som) kvadratrod? [0;18 (er) kvadratroden. 0;18] har den fjernet sig ved bunden. Når den (har fjernet sig) 0;18 ved bunden, hvad er den da reduceret foroven? Kvadrer 0;18. 0;5,24 vil du få. 0;5,24 fratrækkes 0,15; 0;9,36 vil du få. Hvad (har) 0;9,36 (som) kvadratrod? 0;24 (er) kvadratroden. 0;24 fratrukket 0;30, du vil få 0;6. Den er reduceret (dette). Således (er) fremgangsmåden.

Tekst 5: Euklid om antallet af primtal

Med henvisning til sætning 20 fra bog IX i *Elementerne* siges ofte at Euklid viste, at der findes uendelig mange primtal. Nedenfor er gengivet Euklids formulering efter [Eibe 1897–1912, Bog VII–IX, pp. 105–06].

Bemærk, at i citatet betyder det, at et tal a *måler* et andet tal b, blot at a går op i b. Forud er i sætning VII.31 vist, at når et tal ikke er et primtal, findes der et primtal, som måler (går op i) det. Og i sætning VII.36 er det vist, hvordan man altid kan finde det mindste tal, som måles af en række tal (dvs. deres mindste fælles multiplum).

a) Læs teksten og gengiv argumentet. Sammenlign fremstillingsformen hos Euklid med babylonsk og moderne matematik.

b) Kommenter beviset og overvej, hvorfor Euklid formulerede sætningen anderledes end vi gør.

Bog IX

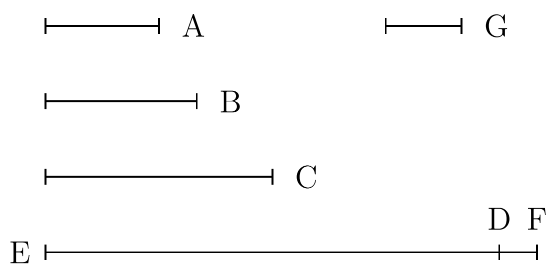
20.

Der er flere Primtal end ethvert forelagt Antal af Primtal.

Lad A, B, C være de forelagte Primtal. Jeg siger da, at der er flere Primtal end A, B, C.

Lad der nemlig være taget det mindste Tal, som maales af A, B, C, og lad det være DE, og lad Enheden DF være lagt til DE. Enten er saa EF et Primtal, eller ogsaa er det det ikke. Lad det først være et Primtal; saa er der fundet flere Primtal end A, B, C nemlig A, B, C, EF.

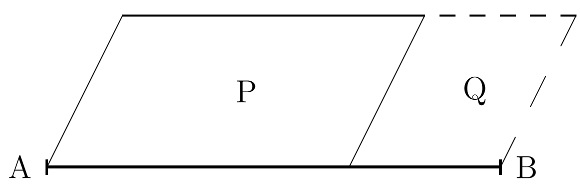
Men lad saa EF ikke være et Primtal, saa maales det af et eller andet Primtal. Lad det maales af et Primtal G. Jeg siger da, at G ikke er det samme som et af Tallene A, B, C. Thi hvis det er muligt, saa lad det være det. Og A, B, C maale DE. Altsaa vil G ogsaa maale DE. Desuden maaler det EF. Altsaa vil G, som er et Tal, ogsaa maale Resten: Enheden DF; hvilket er urimeligt. Altsaa er G ikke det samme som et af Tallene A, B, C. Og det er givet, at det er et Primtal. Altsaa er der fundet flere Primtal end det forelagte Antal A, B, C, nemlig A, B, C, G; hvilket skulle bevises.



Tekst 6: Euklid om det elliptiske fladeanlæg

Det er omdiskuteret, hvilken påvirkning grækerne har modtaget fra babylonsk matematik. Teksterne nedenfor bliver undertiden fremdraget som støtte for, at der har været en forbindelse. Det drejer sig om VI.28 og II.5 fra Euklids *Elementer* som er gengivet efter [Eibe 1897–1912, Bog I–II, pp. 76–77 & Bog V–VI, pp. 88–90].

a) Læs VI.28. Bemærk, at det *at lægge et parallelogram langs en given ret linie* helt bogstaveligt betyder, at hvis AB er den rette linie og P det givne parallelogram så lægges P som vist på figuren nedenfor og Q bliver "det manglende". Konstruktionen i sætning VI.28 kaldes det elliptiske fladeanlæg (det græske ord *elleipsis* betyder mangel eller udeladelse), og den spiller en vigtig rolle i definitionen af ellipsen som et keglesnit hos Apollonius (se fx [Katz 1993, p. 114; 1998, pp. 119–20]).



b) Gennemgå konstruktionen i det specialtilfælde, hvor det givne parallelogram D er et kvadrat. Kald AB for a og siderne i det ønskede rektangel x og y. Overvej at konstruktionen moderne svarer til at konstruere en løsning til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x \cdot y &= c \end{aligned}$$

hvor c er arealet er den givne retlinede figur C.

c) Ligningssystemet ovenfor var netop et af dem, som babylonerne behandlede. Sammenlign deres løsningsalgoritme med Euklids behandling.

d) Læs sætning II.5 og diskuter ligheder og forskelle mellem den og specialtilfældet af sætning VI.28 beskrevet i b).

Bog VI

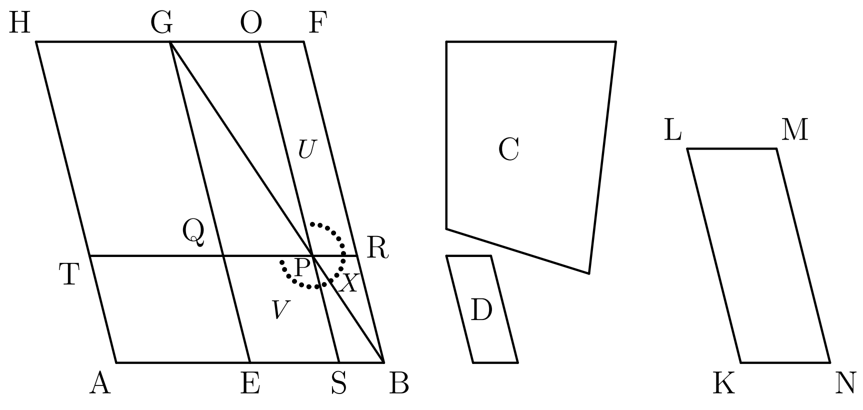
28.

Langs en given ret Linie at lægge et Parallelogram lig en given retlinet Figur, saa at der mangler et Parallelogram, som er ligedannet med et givet: dog maa den givne retlinede Figur ikke være større end det Parallelogram, der tegnes paa Halvdelen og er ligedannet med det manglende.

Lad AB være den givne rette Linie, C den givne retlinede Figur, lig med hvilken Parallelogrammet langs AB skal lægges, og som ikke er større end det Parallelogram, der tegnes paa Halvdelen af AB og er ligedannet med det manglende, og D det Parallelogram, som det manglende skal være ligedannet med. Man skal da langs den givne rette Linie AB lægge et Parallelogram lig den givne retlinede Figur C, saa at der mangler et Parallelogram, som er ligedannet med D.

Lad AB være halveret i Punkt E, lad der paa EB være tegnet EBFG ligedannet og ligedan beliggende med D, og lad Parallelogrammet AG være fuldført.

Hvis nu AG er lig C, saa vil det forlangte være udført; thi langs den givne rette Linie AB er der lagt Parallelogrammet AG lig den givne retlinede Figur C, saa at der mangler Parallelogrammet GB, som er ligedannet med D. Men hvis ikke, saa lad HE være større end C. Men HE er lig med GB. Altsaa er ogsaa GB større end C. Lad saa KLMN være konstrueret paa een Gang lig med Forskellen mellem GB og C og ligedannet og ligedan beliggende med D. Men D er ligedannet med GB. Altsaa er ogsaa KM ligedannet med GB. Lad nu KL være tilsvarende til GE og LM til GF. Da nu GB er lig C + KM, saa er GB større end KM. Altsaa er GE større end KL og GF større end LM. Lad GQ være afsat lig KL, GO lig LM, og lad Parallelogram QGOP være fuldført, saa er det lig med og ligedannet med KM. Altsaa er ogsaa GP ligedannet med GB. Altsaa ligger GP omkring den samme Diagonal som GB. Lad GPB være deres Diagonal og lad Figuren være tegnet.



Da nu BG er lig C + KM, af hvilke GP er lig KM, saa er Resten Gnomon UXV lig Resten C. Og da OR er lig QS, saa lad PB være lagt til dem begge; saa er hele OB lig hele QB. Men QB er lig TE, fordi Side AE er lig Side EB. Altsaa er TE = OB. Lad QS være lagt til dem begge, saa er hele TS lig Gnomon VXU. Men det blev bevist, at Gnomon VXU er lig C. Altsaa er TS = C.

Altsaa er der langs den givne rette Linie AB lagt Parallelogrammet ST lig den givne retlinede Figur C, saa at der mangler Parallelogrammet PB, som er ligedannet med D; h. s. g.

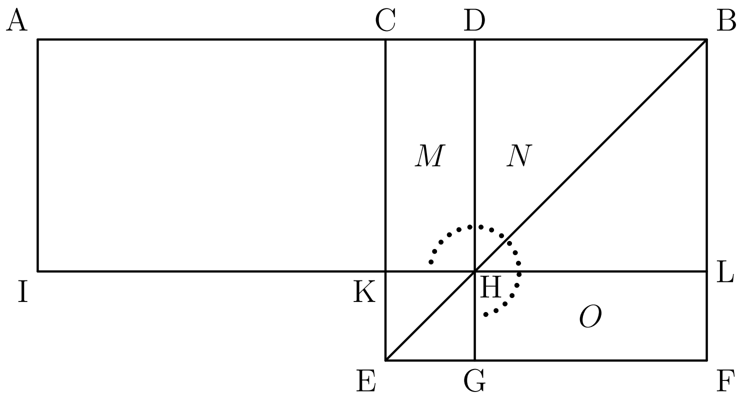
Bog II

5.

Naar en ret Linie er delt i ligestore og i uligestore Stykker, er det Rektangel, der indesluttes af hele Liniens uligestore Stykker, samt Kvadratet paa Stykket mellem Delingspunkterne lig Kvadratet paa Halvdelen.

Lad nemlig en ret Linie AB være delt i ligestore Stykker i C og i uligestore Stykker i D. Jeg siger da: Rektanglet AD,DB + □CD = □CB.*

Lad der nemlig paa CB være tegnet et Kvadrat CEFB, lad BE være dragen, lad DG være trukken gennem D parallel med CE eller BF, lad endvidere IL være trukken gennem H parallel med AB eller EF, og lad endelig AI være trukken gennem A parallel med CK eller BL.



Nu er Udfyldningsfigur CH lig Udfyldningsfigur HF; lad saa DL være lagt til dem begge, saa er hele CL lig hele DF. Men CL er lig AK, fordi AC er lig CB. Altsaa er AK = DF. Lad CH være lagt til dem begge, saa er hele AH lig Gnomon MNO. Men AH er Rektangel AD,DB, thi DH er lig DB; altsaa er Gnomon MNO = Rektangel AD,DB. Lad KG, som er lig □CD, være lagt til dem begge, saa er Gnomon MNO + KG = Rektangel AD,DB + □CD. Men Gnomon MNO + KG er hele Kvadratet CEFB, som er □CB. Altsaa er Rektangel AD,DB + □CD = □CB.

Altsaa: naar en ret Linie er delt i ligestore og i uligestore Stykker, er det Rektangel, der indesluttes af hele Liniens uligestore Stykker, samt Kvadratet paa Stykket mellem Delingspunkterne lig Kvadratet paa Halvdelen; h. s. b.

---

* $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Tekst 7: Diskussionen af geometrisk algebra

Forskerne er ikke altid enige om, hvordan kilderne til oldtidens matematik skal fortolkes. Et godt eksempel herpå er den geometriske algebra i græsk matematik. Vendingen "geometrisk algebra" blev lanceret i 1800-tallet som betegnelse for en del af den græske matematik, bl.a. sætninger i bog II og VI i Euklids *Elementer*, hvis indhold svarer til moderne algebraiske sætninger. Man fortolkede de pågældende sætninger som hørende til algebra, men formuleret i et geometrisk sprog. Den foregående kildetekst viser eksempler på sætninger fra den geometriske algebra.

Nedenfor gengives udklip fra Sabetai Ungurus angreb på denne fortolkning i [Unguru 1975–76] og udklip fra van der Waerdens reaktion på dette angreb i [van der Waerden 1975–76]. Ungurus betegnelse "whig history" betyder, at i den historiske fremstilling af en periode er den efterfølgende udvikling blevet inddraget, dvs. fremstillingen af perioden er blevet farvet af, hvad der siden skete. Diskussionen blev fortsat efter de to nævnte indlæg og man kan finde henvisninger til andre indlæg i [Katz 1993, p. 93, note 18; 1998, p. 100, note 17].

a) Læs udklippene fra Ungurus og van der Waerdens artikler. Hvilke argumenter fremføres af Unguru mod og af van der Waerden for fortolkningen som geometrisk algebra? Hvad siger de om hinandens argumenter?

b) I hvilken betydning bruger Unguru og van der Waerden ordet "algebra"?

c) Hvad synes du selv om geometrisk algebra, bl.a. ud fra sætningerne i den foregående kildetekst? Ligger der en algebraisk tankegang bag sætningerne der?

d) Er det forkert at bruge moderne symbolik i beskrivelsen af græsk matematik?

On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics

Sabetai Unguru

[. . .]
The situation is particularly scandalous in the history of ancient and medieval mathematics. It is in truth deplorable and sad when a student of ancient or medieval culture and ideas must familiarize himself first with the notions and operations of *modern* mathematics in order to grasp the meaning and intent of modern commentators dealing with ancient and medieval mathematical texts. With very few and notable exceptions, Whig history *is* **history** in the domain of the history of mathematics; indeed, it is still, largely speaking, the standard, acceptable, respectable, 'normal' kind of history, continuing to appear in professional journals and scholarly monographs. It is *the* way to write the history of

mathematics. And since this is the case, one is faced with the awkward predicament of having to learn the language, techniques, and ways of expression of the modern *mathematician* (typically the manufacturer of 'historical' studies) if one is interested in the *historical* exegesis of *pre-modern* mathematics; for it is a fact that the representative audience of the mathematician fathering 'historical' studies consists of historians (or people who identify themselves as historians) rather than mathematicians. The latter look condescendingly upon their (usually older) colleagues in their new and somewhat strange hypostasis which seems to indicate to the working mathematician an implicit, but public, confession of professional (*i.e.,* mathematical) impotence.

As to the goal of these so-called 'historical' studies, it can easily be stated in one sentence: to show how past mathematicians hid their modern ideas and procedures under the ungainly, *gauche*, and embarrassing cloak of antiquated and out-of-fashion ways of expression; in other words, the purpose of the historian of mathematics is to unravel and disentagle past mathematical texts and transcribe them into the modern language of mathematics, making them thus easily available to all those interested.

I sit angreb beskæftiger Unguru sig først og fremmest med geometrisk algebra i græsk matematik. Efter kort at have beskrevet ideen i denne, dvs. at det er en opfattelse af, at grækerne iklædte deres algebra en geometrisk sprog, skriver han:

What are the grounds for such a view and what are its underlying assumptions? Let me state from the outset that I cannot find any *historically* gratifying basis for this generally accepted view, which, I think, owes its origin, in part, to the fact that those who have been writing the history of mathematics in general, and that of ancient mathematics (including Greek) in particular, have typically been mathematicians, abreast of the modern developments of their discipline, who have been largely unable to relinquish and discard their laboriously acquired mathematical competence when dealing with periods in history during which such competence is historically irrelevant and (I dare say) outright anachronistic. Such an approach furthermore, stems from the unstated assumption that mathematics is a *scientia universalis*, an algebra of thought containing universal ways of inference, everlasting structures, and timeless, ideal patterns of investigation which can be identified throughout the history of civilized man and which are *completely independent of the form in which they happen to appear at a particular juncture in time.* In other words, such an interpretation takes it for granted that *form* and *content* do not constitute and integral whole in mathematics, that, as a matter of fact, **content** is independent of **form**, and that one can, therefore, transcribe with impunity ancient mathematical texts by means of modern symbolic algebraic notation in order to gain an 'insight' into their otherwise 'cumbersome' content.

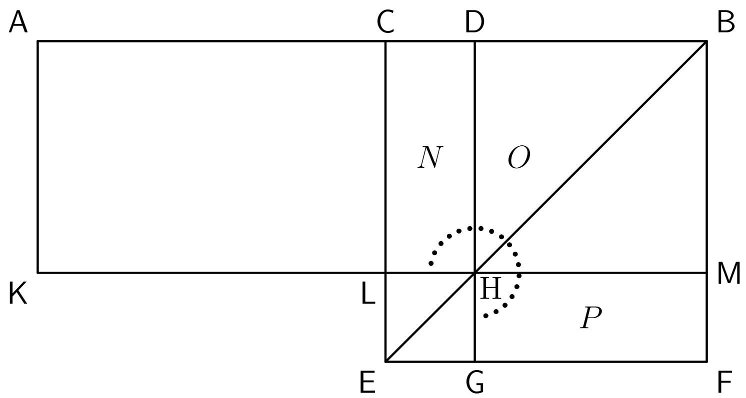
Furthermore, exactly because this content (like the inert gases) is essentially unaffected by its formal surroundings, the ability of the modern mathematician to uncover it and give it a 'palatable' (*i.e.*, modern) form constitutes not only the best *modern* reading of ancient 'burdensome' and 'oppressive' mathematical texts but also the only *correct* reading and, at the same time, *the* proof that this is what the ancient mathematician had in mind when he put down (in an awkward fashion, to be sure) for posterity his mathematical thoughts. Thus, if *we* see in a number of EUCLIDEAN propositions in the *Elements* quadratic equations, then this is what EUCLID had in mind when he enunciated and proved those propositions geometrically; [...]

På de følgende sider sætter Unguru navne på dem, som han anklager for at dyrke matematikhistorie på denne måde, og her nævner han bl.a. van der Waerden. Efter yderligere nogen diskussion vender han sig mod nogle eksempler.

Let us now proceed to the promised examples.

Proposition II.5 states: 'If a straight line be cut into equal and unequal segments, the rectangle contained by the unequal segments of the whole together with the square on the straight line between the points of section is equal to the square on the half.'[1]

EUCLID'S proof advances through the following stages: Let AB be given and bisected at C; let it also be divided into two unequal segments at D. Construct the square on CB and draw BE. Let $DG \parallel CE$. Through H, the point of intersection of DG and BE, let KM be drawn $\parallel AB$, and through A let AK be drawn $\parallel BM$. By I.43, the complement $CH =$ the complement HF. Consequently, $CM = DF$. But $CM = AL$ (because $AC = CB$ by hypothesis); therefore $AL = DF$. By adding CH to each of the preceding rectangles, it follows that $AH =$ gnomon NOP. But AH is the rectangle AD, DB (because $AK = DH = DB$), therefore the gnomon $NOP =$ rectangle AD, DB. Let LG (the square on CD) be added to each member of the previous equality. $\therefore$ Square on $CB =$ rectangle $AD, DB+$ square on CD, q.e.d.[2]



[1] EUCLID, *Elements*, **I**, 382.
[2] *Ibid.*, 382–83.

These are EUCLID'S enunciation and proof. There is no trace of equations here as there is no trace of equations anywhere in Greek classical mathematics, *i.e.*, in Greek geometry. The proof is purely geometrical, constructive, intuitive (or visual), in the sense of its appeal to the eye, and it consists of a logical concatenation of statements about geometrical objects (in this case, rectangles, squares, and gnomons). There are no symbols and, consequently, there are no operations performed on symbols; the proof appeals to spatial perception rather than being abstract and it is essentially rooted in what has become known as Aristotelian predicate logic. All these are the very characteristics of Greek geometry.[3]

And yet what do we find in HEATH'S commentary on II.5? 'perhaps the most important fact about II.5,6 is however their bearing on the *Geometrical Solution of a quadratic equation.*'[4] How does HEATH discern such a bearing? This is very simple:

> Suppose, in the figure of II.5, that $AB = a$, $DB = x$; then
>
> $$\begin{aligned} ax - x^2 &= \text{the rectangle } AH \\ &= \text{the gnomon } NOP. \end{aligned}$$
>
> Thus, if the area of the gnomon is given ($= b^2$, say), and if a is given ($= AB$), the problem of solving the equation
>
> $$ax - x^2 = b^2$$
>
> is, in the language of geometry, *To a given straight line (a) to apply a rectangle which shall be equal to a given square (b^2) and shall fall short by a square figure,* i.e. to construct the rectangle AH or the gnomon NOP.[5]

What does this prove? That the Greeks solved quadratic equations? *Not at all*! The only thing it proves is that HEATH (and ZEUTHEN, and TANNERY, and VAN DER WAERDEN, and P. H. MICHEL, *etc., etc.*) can transcribe EUCLID'S geometry into algebraic symbolism and obtain (in this case) a quadratic equation. Does this tell us anything about the Greeks in general, and about II.5 in particular? *Nothing. There is not the slightest shred of geniune historical evidence that* EUCLID *(or the other great Hellinistic mathematicians, let alone the* PYTHAGOREANS*) ever used equations in their geometrical works. The sources do not contain equations.* This, however, does not prevent historians of mathematics from applying foreign (algebraic) techniques to Greek geometry and obtaining thus algebraic counterparts to Greek geometrical propositions, which they, then, illegitimately consider as being the genuine Greek stuff.

[3] *Cf.* 'Babyl. Algebra', 372; see also 'Die Anfänge der algebr. Denkweise', 17–18, *passim.*

[4] *Elements*, 383.

[5] *Ibid.*; *cf*. also ZEUTHEN, *Die Lehre*, 19 and TANNERY, *Mem. Scient.*, **1**, 257–59. Also, ZEUTHEN, *Geschichte d. Math. im. Alt. u. Mittel.*, 47–48 and 52.

Unguru angiver derefter en række tilsvarende eksempler fra andre dele af den græske matematik.

Defence of a "Shocking" Point of View

B. L. van der Waerden

1. Introduction

In his paper "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics" Sabetai Unguru severely criticizes the views of Tannery, Zeuthen, Neugebauer and myself on the "Geometrical Algebra" of the Greeks. Unguru summarizes our position in one sentence: "Greek 'geometrical algebra' is nothing but 'Babylonian algebra' in geometrical attire", and he starts to prove that this position is historically unacceptable. Unguru states his objections very clearly. The object of the present paper is to defend our position against this emphatic attack.

2. Algebraic Thinking

[...] When I speak of Babylonian or Greek or Arab algebra, I mean algebra in the sense of Al-Khwārizmī, or in the sense of Cardano's "Ars magna", or in the sense of our school algebra. Algebra, then, is:

the art of handling algebraic expressions like $(a+b)^2$ *and of solving equations like* $x^2 + ax = b$.

If this definition is applied to any Babylonian or Arab text it is unimportant what symbolism the text uses. Our relation

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

can be stated in words thus:

"The square of a sum is the sum of the squares of the terms and twice their product."

The statement in words says exactly the same thing as the formula. [...]

Van der Waerden viser derefter hvor man kan finde algebra, efter denne definition, i babylonsk og arabisk matematik. Endelig vender han sig mod:

7. Geometrical algebra

Now we are sufficiently prepared to discuss Greek "Geometrical Algebra". Algebra, as we had defined it, is an art which can be applied to numbers as well as to line segments and areas, and in fact the Babylonians already applied it to numbers as well as to line segments. Now if algebra is restricted to line segments and their products (*i.e.* rectangles and squares), one obtains a restricted algebra which may be formulated in purely geometric terms, and which may well be called "geometric algebra". Thus, if the formula

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

is restated in words and restricted to line segments a and b, one obtains just the theorem II 4 of EUCLID'S elements.

Thus, "geometric algebra" is by no means a *contradictio in terminis*, as UNGURU claims, but it is a reality. It is algebra restricted to line segments and areas, and hence a part of algebra, but it is also a part of geometry, namely a set of geometrical theorems and solutions of problems, which only line segements, rectangles and orthogonal parallelepipeda are considered. Examples of geometrical algebra are the propositions II 1–6 and II 9–10 of EUCLID.

8. Two Roads to Geometrical Algebra

As we have seen, geometrical algebra is a part of algebra as well as a part of geometry. It follows that one can arrive at geometrical algebra by two different roads: One can either start with geometrical problems concerning rectangles and squares, and solve these problems by means of theorems, or one can start with algebraic problems such as the solution of quadratic equations and reformulate them in geometrical language, writing "rectangle" instead of "product".

The Greeks, and in particular the Pythagoreans, were perfectly able to follow either road. They called the product of a number by itself "square", and they solved a purely arithmetical problem concerning Side-Numbers and Diagonal-Numbers by means of the geometrical theorem II 10. The question is now: What road did the Greeks actually follow? Did they start with algebraic (or arithmetical) or with geometrical problems?

We (ZEUTHEN and his followers) fell that the Greeks started with algebraic problems and translated them into geometric language. UNGURU thinks that we argued like this: We found that the theorems of EUCLID II can be translated into modern algebraic formalism, and that they are easier to understand if thus translated, and this we took as "*the* proof that this is what the ancient mathematician had in mind". Of course, this is nonsense. We are not so weak in logical thinking! The fact that a theorem can be translated into another notation does not prove a thing about what the author of the theorem had in mind.

No, our line of thought was quite different. We studied the wording of the theorems and tried to reconstruct the original ideas of the author. We found it *evident* that these theorems did not arise out of geometrical problems. We were not able to find any interesting geometrical problem that would give rise to theorems like II 1–4. On the other hand, we found that the explanation of these theorems as arising from algebra worked well. Therefore we adopted the latter explanation.

Now it turns out, to my great surprise, that what we, working mathematicians, found evident, is not evident to UNGURU. Therefore I shall state more clearly the reasons why I fell that theorems like EUCLID II 1–4 did not arise from geometrical considerations.

9. The Origin of Euclid II, Propositions 1–4

Proposition I reads in the translation of HEATH:

> If there be two straight lines, and one of them be cut into any number of segments, the rectangle contained by the two straight lines is equal to the rectangles contained by the uncut straight line and each of the segments.

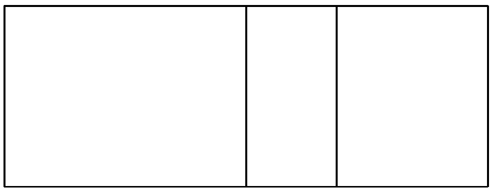


Figure 1: Diagram to EUCLID'S Pro. II,1

Geometrically, this theorem just means that every rectangle can be cut into rectangles by lines parallel to one of the sides. This is evident: everyone sees it by just looking at the diagram. Within the framework of geometry there is no need for such a theorem: EUCLID never makes use of it in his first four books.

However, if one starts with the algebraic operations of addition and multiplication of numbers and asks: How does one multiply a sum by a quantity a? the answer is: Multiply the terms of the sum by a and add the results. In elementary arithmetics, this rule is needed all the time. If this rule of computation is translated into the language of geometry, Proposition II 1 results. In other words: Proposition II 1 furnishes a geometrical proof of an algebraic rule of computation.

II 2 and II 3 are just special cases of II 1. Once more, from the point of view of geometry there is no reason to formulate these trivialities as theorems.

II 4 says:

> If a straight line be cut at random, the square on the whole is equal to the squares on the segments and twice the rectangle contained by the segments.

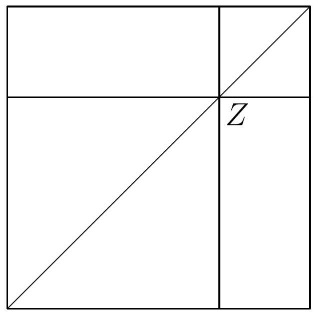


Figure 2: Diagram to EUCLID, Prop. II 4

Geometrically, this means: if we take a point Z on the diagonal of a square and draw lines through Z parallel to the sides of the square, the square will be divided into two squares and two rectangles. This is trivial.

Van der Waerden diskuterer derefter flere af sætningerne i Euklids *Elementer* bog II, III og VI. Afslutningsvis opsummerer han.

14. The Relation between Babylonian and Greek Mathematics

As I have shown in my book, Science Awakening I, there are several points of contact between Babylonian and Greek mathematics. I shall now, once more, enumerate these points, referring to my book for further details.

1. The Babylonians as well as the Pythagoreans knew the "Theorem of PYTHAGORAS".

[...]

5. Both knew how to solve quadratic equations. The Greek method of solution is the same as the Babylonian one, but in geometric attire.

6. The Babylonians had four standard types of linear and quadratic equations with two unknowns:

$$\text{(I)} \begin{cases} x+y = a \\ xy = C, \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} x-y = a \\ xy = C, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} x+y = a \\ x^2+y^2 = S, \end{cases} \qquad \text{(IV)} \begin{cases} x-y = a \\ x^2+y^2 = S, \end{cases}$$

The Greeks formulated four theormes II 5–6 and II 9–10, by means of which these types can be solved. The solutions thus obtained are the same as the Babylonian solutions, but in geometric language. They differ from all simpler geometrical solutions.

Tekst 8: Exhaustionsmetoden

Græske matematikere undgik så vidt muligt uendelige processer i deres beviser. Ved en bevismetode, som i 1600-tallet blev kaldt exhaustionsmetoden, var de dog i stand til stringent at bevise resultater om arealer og volumener som vi idag vil klare ved hjælp af integralregning.

Hos Euklid er exhaustionsmetoden baseret på sætning X.1 i *Elementerne*, der efter [Eibe 1897–1912, Bog X, p. 4] lyder:

BOG X

1.

Naar der er afsat to uligestore Størrelser, og der fra den største trækkes en, der er større end Halvdelen, og fra Resten en, der er større end Halvdelen, og man bliver ved med det, vil der blive en eller anden Størrelse til Rest, som vil være mindre end den afsatte mindste Størrelse.

a) Et eksempel på et bevis hos Euklid efter exhaustionsmetoden er beviset for sætning XII.2 i *Elementerne*, som siger at to cirkler forholder sig som kvadratet på deres diametre, altså hvad der moderne svarer til at sige, at arealet af en cirkel er proportional med kvadratet på diameteren. Nedenfor er sætningerne XII.1–2 gengivet efter [Eibe 1897–1912, Bog XI–XIII, pp. 74–79].

   Gennemlæs grundigt beviset for XII.2 (sætning 1 kan overspringes). Indfør kortere notation som fx C_1 for cirkel ABCD osv. Gør dig klar hvor sætning X.1 bruges og hvad der er den store og den lille størrelse. Det kan bemærkes, at ordet *exhaustion* betyder at "udtømme".

b) Hvad er den overordnede struktur i beviset for Euklid XII.2? Find resultater hos Arkimedes som bevises ved exhaustionsmetoden og angiv den overordnede bevisstruktur i hans beviser (se i [Katz 1993; 1998] kapitel 3).

c) Exhaustionsmetoden er som sagt en bevismetode. Den er ikke anvendelig til at *finde* nye resultater. Hvorfor ikke?

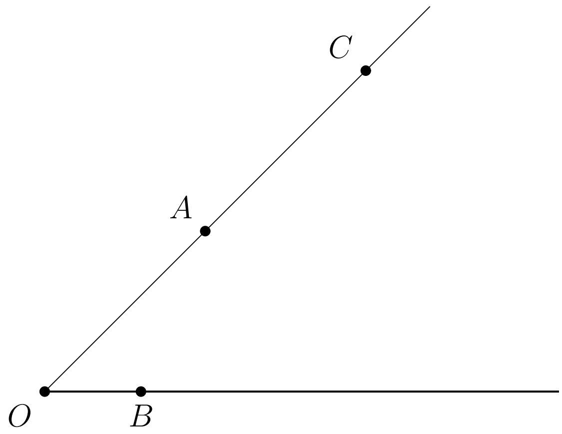
d) Hvis der er givet tre størrelser a, b og c, så kaldes en størrelse x af samme art som de tre en *fjerdeproportional* hvis $a{:}b = c{:}x$. Hvor i beviset benytter Euklid en fjerdeproportional?

e) Hvis a, b og c er liniestykkerne OA, OB og OC på figuren nedenfor, konstruer da et punkt X, således at $x = OX$ er en fjerdeproportional.

   Vink: Konstruer en passende trekant, der er ensvinklet med $\triangle OAB$.

f) Euklids brug af en fjerdeproportional i beviset for XII.2 har været kritiseret flere gange siden antikken. Hvorfor tror du det?

   Vink: Hvordan mon Euklid konstruerede den fjerdeproportional, som han benyttede i beviset?

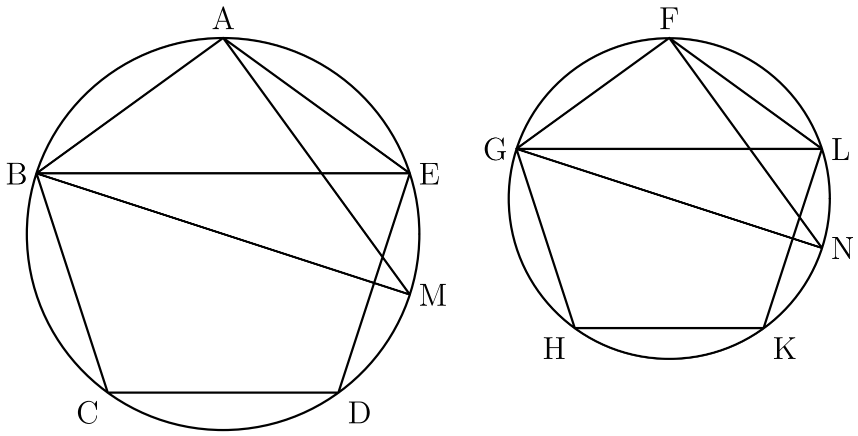


Bog XII

1.

Ligedannede Polygoner i Cirkler forholde sig til hinanden som Kvadraterne paa Diametrene.

Lad ABC og FGH være Cirkler, lad ABCDE og FGHKL være ligedannede Polygoner i dem, og lad BM og GN være Cirklernes Diametre. Jeg siger da: □BM/□GN = Polygon ABCDE/Polygon FGHKL.



Lad nemlig BE, AM, GL og FN være dragne. Da nu Polygon ABCDE er ligedannet med Polygon FGHKL, er ∠BAE = ∠GFL og BA/AE = GF/FL. VI D.1
Saa ere BAE og GFL to Trekanter, som have et Par Vinkler ligestore ∠BAE = ∠GFL, og Siderne omkring de ligestore Vinkler proportionale. Altsaa er △ABE ensvinklet med △FGL. Altsaa er ∠AEB = ∠FLG. Men ∠AEB = ∠AMB, thi de VI.6
staa paa samme Bue. Og ∠FLG = ∠FNG. Altsaa er ogsaa ∠AMB = ∠FNG. III.21

III.31 Desuden er den rette Vinkel BAM lig den rette Vinkel GFN. Altsaa er det tredje
I.32 Par Vinkler ogsaa ligestore. Altsaa er △ABM ensvinklet med △FGN. Altsaa er
VI.4 BM/GN = BA/GF. Men □BM/□GN er dobbelt[1] saa stort som BM/GN, og
VI.20 Polygon ABCDE/Polygon FGHKL er dobbelt saa stort som BA/GF. Altsaa er ogsaa □BM/□GN = Polygon ABCDE/Polygon FGHKL.

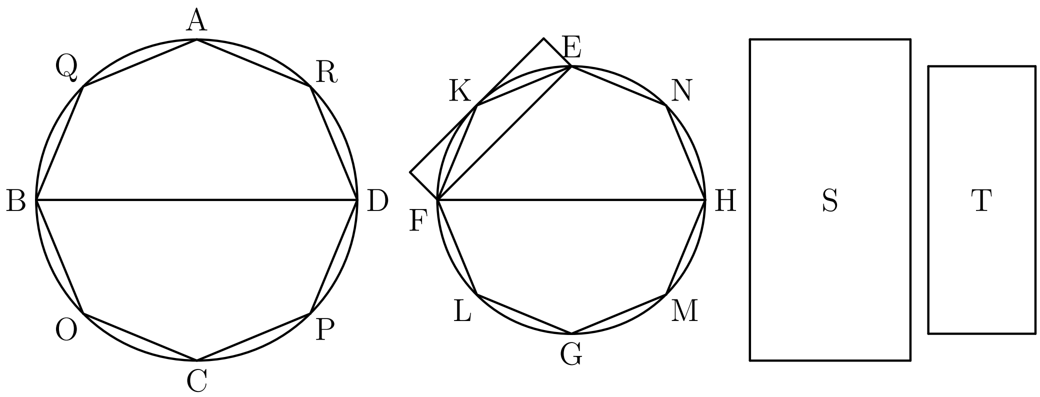
Altsaa: Ligedannede Polygoner i Cirkler forholde sig til hinanden som Kvadraterne paa Diametrene; h. s. b.

Bog XII

2.

Cirkler forholde sig til hinanden som Kvadraterne paa Diametrene.

Lad ABCD og EFGH være Cirkler og BD og FH deres Diametre. Jeg siger da: Cirkel ABCD/Cirkel EFGH = □BD/□FH.



Thi hvis Cirkel ABCD/Cirkel EFGH ikke er lig □BD/□FH, saa vil □BD/□FH være lig Cirkel ABCD til enten en mindre eller større Flade end Cirkel EFGH. Lad det først være til en mindre: S, og lad der i Cirkel EFGH være indskrevet
IV.6 et Kvadrat EFGH. Saa er det indskrevne Kvadrat større end Halvdelen af Cirkel EFGH, fordi, hvis vi trak Cirkeltangenterne gennem Punkterne E, F, G og H, er □EFGH Halvdelen af det om Cirklen omskrevne Kvadrat, og Cirklen er mindre end det omskrevne Kvadrat; følgelig er det indskrevne Kvadrat EFGH større end Halvdelen af Cirkel EFGH. Lad Buerne EF, FG, GH og HE være halverede i Punkterne K, L, M og N, og lad EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN og NE være dragne. Saa er hver af Trekanterne EKF, FLG, GMH og HNE større end Halvdelen af sit Cirkelafsnit, fordi, hvis vi trak Cirkeltangenterne gennem Punkterne K, L, M og N, og fuldførte Parallelogrammerne paa de rette Linier EF, FG, GH og HE, vil hver af Trekanterne EKF, FLG, GMH og HNE være Halvdelen af sit

[1] *Note af redaktøren:* At forholdet □BM/□GN er *dobbelt så stort* som BM/GN er Eibes oversættelse af, at □BM/□GN er lig forholdet BM/GN sammensat med sig selv, dvs. moderne □BM/□GN = BM/GN·BM/GN = BM^2/GN^2.

Parallelogram, men deres Afsnit er mindre end Parallelogrammet; følgelig er hver af Trekanterne EKF, FLG, GMH og HNE større end Halvdelen af sit Cirkelafsnit. Naar vi saa halvere de resterende Buer og drage rette Linier og blive ved med det, ville vi faa til Rest nogle Cirkelafsnit, som tilsammen ville være mindre end Forskellen mellem Cirkel EFGH og Flade S. Thi det blev bevist i første Sætning i tiende Bog, at naar der er afsat to uligestore Størrelser, og derfra den største trækkes en, der er større end Halvdelen, og fra Resten en, der er større end Halvdelen, og man bliver ved med det, vil der blive en eller anden Størrelse til Rest, som vil være mindre end den afsatte mindste Størrelse. Lad den nu være bleven til Rest, og lad Afsnittene i Cirkel EFGH paa EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN og NE tilsammen være mindre end Forskellen mellem Cirkel EFGH og Flade S. Saa er Resten Polygon EKFLGMHN > Flade S. Lad der i Cirkel ABCD være indskrevet en Polygon AQBOCPDR ligedannet med Polygon EKFLGMHN. Saa
er $\square$BD/$\square$FH = Polygon AQBOCPDR/Polygon EKFLGMHN. Men $\square$BD/$\square$FH 1
er ogsaa lig Cirkel ABCD/Flade S. Altsaa er Cirkel ABCD/Flade S = Polygon
AQBOCPDR/Polygon EKFLGMHN. Altsaa er, paatværs, Cirkel ABCD til Po- V.11
lygonen i den lig Flade S til Polygon EKFLGMHN. Og Cirkel ABCD er større end Polygonen i den. Altsaa er Flade S ogsaa større end Polygon EKFLGMHN. Men den er ogsaa mindre; hvilket er umuligt. Altsaa er $\square$BD/$\square$FH ikke lig Cirkel ABCD til en mindre Flade end Cirkel EFGH. Paa samme Maade ville vi saa ogsaa kunne bevise, at $\square$FH/$\square$BD heller ikke er lig Cirkel EFGH til en mindre Flade end Cirkel ABCD.

Jeg siger saa, at $\square$BD/$\square$FH heller ikke er lig Cirkel ABCD til en større Flade end Cirkel EFGH.

Thi hvis det er muligt, saa lad det være til en større: S. Saa er, omvendt, $\square$FH/$\square$DB = Flade S/Cirkel ABCD. Men Flade S/Cirkel ABCD er lig Cirkel EFGH til en mindre Flade end Cirkel ABCD. Altsaa er ogsaa $\square$FH/$\square$BD = Cirkel EFGH til en mindre Flade end Cirkel ABCD; hvilket blev bevist at være umuligt. Altsaa er $\square$BD/$\square$FH ikke lig Cirkel ABCD til en større Flade en Cirkel EFGH. Men det blev bevist, at det heller ikke er til en mindre. Altsaa er $\square$BD/$\square$FH = Cirkel ABCD/Cirkel EFGH.

Altsaa: Cirkler forholde sig til hinanden som Kvadraterne paa Diametrene; h. s. b.

Hjælpesætning

Jeg siger saa, at, naar Flade S er større end Cirkel EFGH, er Flade S/Cirkel ABCD lig Cirkel EFGH til en mindre Flade end Cirkel ABCD.

Lad det nemlig være blevet saadan, at Flade S/Cirkel ABCD = Cirkel EFGH/ Flade T. Jeg siger da: Flade T < Cirkel ABCD. Thi da Flade S/Cirkel ABCD = Cirkel EFGH/Flade T, saa er, paatværs, Flade S/Cirkel EFGH = Cirkel ABCD/Flade T. Og Flade S > Cirkel EFGH. Altsaa er ogsaa Cirkel ABCD > Flade T. Følgelig er Flade S/Cirkel ABCD lig Cirkel EFGH til en mindre Flade end Cirkel ABCD; h. s. b.

Tekst 9: Arkimedes om sin metode

Euklids *Elementer* er opbygget deduktiv, og efter de indledende "definitioner" m.m. er strukturen: sætning-bevis sætning-bevis osv. Der er ingen antydning af, hvordan resultaterne er fundet. Dette er også tilfældet for de fleste andre værker fra den græske oldtid. En undtagelse er Arkimedes' *Metoden*, hvori det antydes, hvordan Arkimedes fandt nogle af sine resultater. Nedenfor er givet et uddrag af dette værk efter versionen i tillægget i [Heath 1953, tillægget pp. 12–21].

a) Gennemgå argumentet for propostion 2. Ved omformningen $CA \cdot AS = AO^2$ kan det være nyttigt at tegne linien OC og betragte de ensvinklede $\triangle AOS$ og $\triangle ACO$.

b) Forklar, hvordan Arkimedes gættede sig til, at overfladen af en kugle er fire gange så stor som en storcirkel med samme radius.

c) Hvorfor anser Arkimedes ikke argumenterne for egentlige beviser?

THE METHOD OF ARCHIMEDES TREATING OF MECHANICAL PROBLEMS — TO ERATOSTHENES

Archimedes to Eratosthenes greeting.

I sent you on a former occasion some of the theorems discovered by me, merely writing out the enunciations and inviting you to discover the proofs, which at the moment I did not give. [...]

Arkimedes beskriver herefter nogle sætninger, som han har fundet, og nævner, at han har medtaget beviserne. Han fortsætter:

[...] Seeing moreover in you, as I say, an earnest student, a man of considerable eminence in philosophy, and an admirer [of mathematical inquiry], I thought fit to write out for you and explain in detail in the same book the peculiarity of a certain method, by which it will be possible for you to get a start to enable you to investigate some of the problems in mathematics by means of mechanics. This procedure is, I am persuaded, no less useful even for the proof of the theorems themselves; for certain things first became clear to me by a mechanical method, although they had to be demonstrated by geometry afterwards because their investigation by the said method did not furnish an actual demonstration. But it is of course easier, when we have previously acquired, by the method, some knowledge of the questions, to supply the proof than it is to find it without any previous knowledge. This is a reason why, in the case of the theorems the proof of which Eudoxus was the first to discover, namely that the cone is a third part of the cylinder, and the pyramid of the prism, having the same base and equal height, we should give no small share of the credit to Democritus who was the first to make the assertion with regard to the said figure* though he did not prove it. I am myself in the position of having first made the discovery of the theorem now to be published [by the method indicated], and I deem it necessary to expound the method partly because I have already spoken of it† and I do not want to be thought to have uttered vain words, but equally because I am persuaded that it will be of no little service to mathematics; for I apprehend that some, either of my contemporaries or of my successors, will, by means of the method when once established, be able to discover other theorems in addition, which have not yet occurred to me.

Herefter følger nogle sætninger om tyngdepunkter, samt argumentet for den ovennævnte sætning om parabelsegmentet. Dette argument afsluttes med følgende bemærkning:

Now the fact here stated is not actually demonstrated by the argument used; but that argument has given a sort of indication that the conclusion is true. Seeing then that the theorem is not demonstrated, but at the same time suspecting that the conclusion is true, we shall have recourse to the geometrical demonstration which I myself discovered and have already published.‡

Proposition 2

We can investigate by the same method the proposition that

(1) *Any sphere is (in respect of solid content) four times the cone with base equal to a great circle of the sphere and height equal to its radius; and*

(2) *the cylinder with base equal to a great circle of the sphere and height equal to the diameter is* $1\frac{1}{2}$ *times the sphere.*

(1) Let $ABCD$ be a great circle of a sphere, and AC, BD diameters at right angles to one another.

Let a circle be drawn about BD as diameter and in a plane perpendicular to AC, and on this circle as base let a cone be described with A as vertex. Let the

---

*περὶ τοῦ εἰρημένου σχήματος, in the singular. Possibly Archimedes may have thought of the case of the pyramid as being the more fundamental and as really involving that of the cone. Or perhaps "figure" may be intended for "type of figure."

†Cf. Preface to *Quadrature of Parabola.*

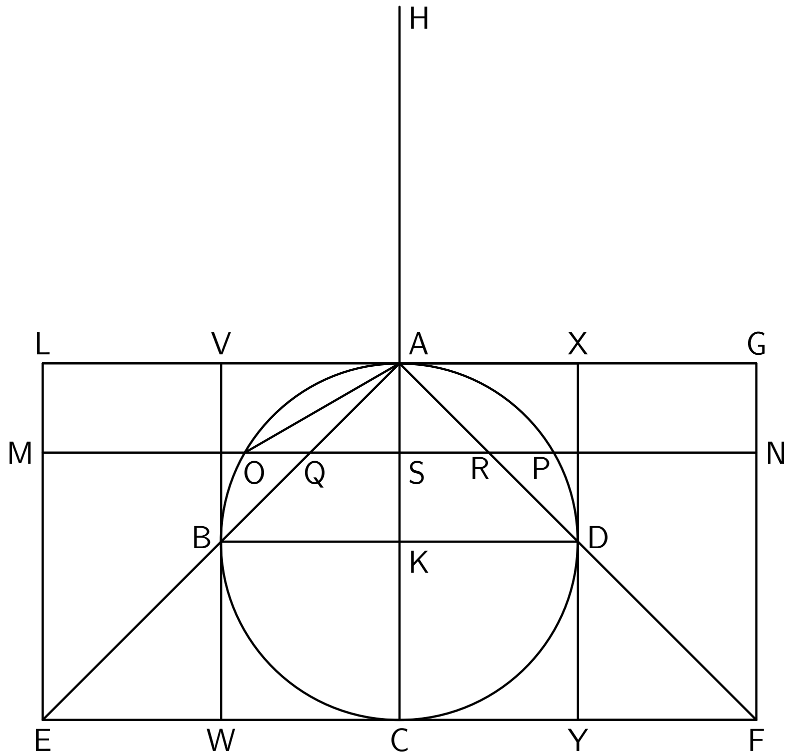
‡The word governing τὴν γεωμετρουμένην ἀπόδειξιν in the Greek text is τάξομεν, a reading which seems to be doutbful and is certainly difficult to translate. Heiberg translates as if τάξομεν meant "we shall give lower down" or "later on", but I agree with Th. Reinach (*Revue générale des sciences pures et appliquées*, 30 November 1907, p. 918) that it is questionable whether Archimedes would really have written out in full once more, as an appendix a proof which, as he says, had already been published (i.e. presumably in the *Quadrature of a Parabola*). τάξομεν, if correct, should apparently mean "we shall appoint", "prescribe" or "assign."

surface of this cone be produced and then cut by a plane through C parallel to its base; the section will be a circle on EF as diameter. On this circle as base let a cylinder be erected with height and axis AC, and produce CA to H, making AH equal to CA.

Let CH be regarded as the bar of a balance, A being its middle point.

Draw any straight line MN in the plane of the circle $ABCD$ and parallel to BD. Let MN meet the circle in O, P, the diameter AC in S, and the straight lines AE, AF in Q, R respectively. Join AO.

Through MN draw a plane at right angles to AC; this plane will cut the cylinder in a circle with diameter MN, the sphere in a circle with diameter OP, and the cone in a circle with diameter QR.



Now, since $MS = AC$, and $QS = AS$,

$$
\begin{aligned}
MS.SQ &= CA.AS \\
&= AO^2 \\
&= OS^2 + SQ^2.
\end{aligned}
$$

And, since $HA = AC$,

$$\begin{aligned} HA : AS &= CA : AS \\ &= MS : SQ \\ &= MS^2 : MS.SQ \\ &= MS^2 : (OS^2 + SQ^2) \ \text{ from above} \\ &= MN^2 : (OP^2 + QR^2) \\ &= (\text{circle, diam. } MN) : (\text{circle, diam. } OP + \text{ circle, diam. } QR). \end{aligned}$$

That is, $HA : AS =$ (circle in cylinder):(circle in sphere + circle in cone).

Therefore the circle in the cylinder, placed where it is, is in equilibrium, about A, with the circle in the sphere together with the circle in the cone, if both the latter circles are placed with their centres of gravity at H.

Similarly for the three corresponding sections made by a plane perpendicular to AC and passing through any other straight line in the parallelogram LF parallel to EF.

If we deal in the same way with all the sets of three circles in which planes perpendicular to AC cut the cylinder, the sphere and the cone, and which make up those solids respectively, it follows that the cylinder, in the place where it is, will be in equilibrium about A with the sphere and the cone together, when both are placed with their centres of gravity at H.

Therefore, since K is the centre of gravity of the cylinder,

$$HA : AK = (\text{cylinder}) : (\text{sphere} + \text{cone } AEF).$$

But $HA = 2AK$; therefore

$$\text{cylinder} = 2\ (\text{sphere} + \text{cone } AEF).$$

Now

$$\text{cylinder} = 3\,(\text{cone } AEF); \qquad \text{[Eucl. XII.10]}$$

therefore

$$\text{cone } AEF = 2\,(\text{sphere}).$$

But, since $EF = 2BD$,

$$\text{cone } AEF = 8\,(\text{cone } ABD);$$

therefore

$$\text{sphere} = 4\,(\text{cone } ABD).$$

(2) Through B, D draw VBW, XDY parallel to AC; and imagine a cylinder which has AC for axis and the circles on VX, WY as diameters for bases.

Then

$$\begin{aligned} \text{cylinder } VY &= 2\,(\text{cylinder } VD) \\ &= 6\,(\text{cone } ABD) \quad \text{[Eucl. XII.10]} \\ &= \tfrac{3}{2}\,(\text{sphere}), \quad \text{from above.} \end{aligned}$$

Q.E.D.

From this theorem, to the effect that a sphere is four times as great as the cone with a great circle of the sphere as base and with height equal to the radius of the sphere, I conceived the notion that the surface of any sphere is four times as great as a great circle in it; for, judging from the fact that any circle is equal to a triangle, with base equal to the circumference and height equal to the radius of the circle, I apprehended that, in like manner, any sphere is equal to a cone with base equal to the surface of the sphere and height equal to the radius.[§]

Tekst 10: Den kinesiske restklassesætning

Den kinesiske restklassesætning har fået dette navn, fordi kineserne arbejdede med den type talteoretiske problemer, som den udtaler sig om. Nedenfor er gengivet en behandling et sådant problem fra *Sun Tzŭ suan-ching* (*Sun Tzŭs matematiske klassiker*) efter den engelske oversættelse i [Libbrecht 1973, p. 269]. Denne tekst formodes at være fra 300- eller 400-tallet og er den ældst kendte behandling af et sådant problem.

Den samme type problemer blev også behandlet af senere kinesiske matematikere, bl.a af Qin Jiushao i *Shushu jiuzhang* (*Matematisk afhandling i ni dele*) fra 1247. Heri gives en generel løsningsmetode til ligningssystemer af typen (1) nedenfor (se fx [Katz 1993, pp. 188–91; 1998, pp. 199–202]).

a) Læs teksten fra *Sun Tzŭ suan-ching* og gengiv problemet og svaret med moderne kongruens modulo-notation.

b) Hvad er Sun Tzŭs metode? For at finde ud af dette kan man starte med at finde ud af, hvordan han når frem til tallene 70, 21 og 15. Det kan bemærkes, at

$$\begin{array}{lll} 70 \equiv 1 \pmod{3} & 70 \equiv 0 \pmod{5} & 70 \equiv 0 \pmod{7} \\ 21 \equiv 0 \pmod{3} & 21 \equiv 1 \pmod{5} & 21 \equiv 0 \pmod{7} \\ 15 \equiv 0 \pmod{3} & 15 \equiv 0 \pmod{5} & 15 \equiv 1 \pmod{7} \end{array}$$

Forklar nu betydningen af 140, 63 og 30. Hvordan fremkommer tallet 105? Giver Sun Tzŭ den fuldstændige løsning til ligningssystemet?

c) I moderne fremstillinger af talteorien bærer følgende sætning fra teorien om restklasser $\mathbb{Z}$ modulo n navnet den kinesiske restklassesætning:

Lad m_1, m_2,..., m_n være parvis indbyrdes primiske naturlige tal og a_1, a_2,..., a_n være hele tal. Der findes da et helt tal a så løsningen

[§]That is to say, Archimedes originally solved the problem of finding the solid content of a sphere before that of finding its surface, and he inferred the result of the latter problem from that of the former. Yet in *On the Sphere and Cylinder* 1 the surface is independently found (Prop. 33) and *before* the volume, which is found in Prop. 34: another illustration of the fact that the order of propositions in the treatises of the Greek geometers as finally elaborated does not necessarily follow the order of discovery.

til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned} \tag{1}$$

er

$$x \equiv a \pmod{m_1 m_2 \dots m_n}.$$

Et mere generel gruppeteoretisk resultat (der har ovenstående som korollar) er:

Lad m_1, m_2,..., m_n *være parvis indbyrdes primiske naturlige tal og*

$$f: \mathbb{Z}/(m_1 m_2 \dots m_n) \to \mathbb{Z}/m_1 \times \mathbb{Z}/m_2 \times \dots \times \mathbb{Z}/m_n$$

den naturlige homomorfi. Da er f *også en gruppeisomorfi.*

Diskuter forskellene mellem resultatet i Sun Tzŭs tekst og den moderne version af den kinesiske restklassesætning nævnt ovenfor (på det problem som Sun Tzŭ beskæftiger sig med), specielt hvad der fremdrages som det vigtigste i de to tilfælde.

Sun Tzŭ suan-ching

We have things of which we do not know the number; if we count them by threes, the remainder is 2; if we count them by fives the remainder is 3; if we count them by sevens the remainder is 2. How many things are there? Answer: 23.

Method: if you count by threes and have the remainder 2, put 140. If you count by fives and have the remainder 3, put 63. If you count by sevens and have remainder 2, put 30. Add these [numbers] and you get 233. From this subtract 210 and you have the result.

For each unity as remainder when counting by threes, put 70. For each unity as remainder when counting by fives, put 21. For each unity as remainder when counting by sevens, put 15. if [the sum] is 106 or more, subtract 105 from this and you get the result.

Tekst 11: Kineserne om ligningssystemer

Jiu zhang suanshu (Regnekunstens ni bøger), hvis forfatter er ukendt, spiller en rolle i kinesisk matematik, som svarer til den Euklids *Elementer* spillede i græsk matematik. Tidspunktet for værkets oprindelse er ukendt, men den eksisterede i en form under det tidlige Han-dynasti (202 f.Kr. til 9 e.Kr.). I 263 e.Kr. udgav Liu Hui en kommenteret udgave af værket.

I kapitel 8 i *Jiu zhang suanshu* er der opgaver, som leder frem til lineære ligningssystemer, og der angives metoder til løsning heraf. Nedenfor er givet en engelsk oversættelse af en af disse opgaver løst ved metoden *fang cheng.* Udover teksten fra *Jiu zhang suanshu* er også anført Liu Huis kommentarer. Oversættelsen er klippet fra [Lay-Young & Tian-Se 1987, pp. 228–34].

a) Følg løsningsalgoritmen og gengiv skridtene med moderne symboler. Kører man helt fast kan man få hjælp ved at kigge i [Katz 1993, pp. 16–17; 1998, pp. 17–19].

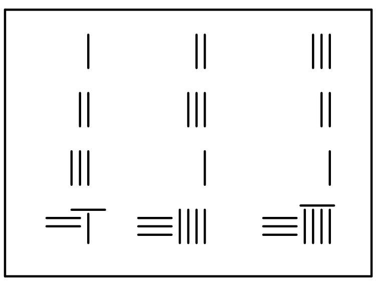
b) På hvilke måder adskiller *fang cheng* sig fra Gauss-elimination?

c) Videre læsning i *Jiu zhang suanshu* afslører, at kineserne accepterede negative tal som koefficienter og kunne regne med dem. Dette skete for eksempel i løsningen af opgave 8 ved metoden *fang cheng*. Opgave 8 lyder:

> By selling 2 cows and 5 goats to buy 13 pigs, there is a surplus of 1000 cash. The money obtained from selling 3 cows and 3 pigs is just enough to buy 9 goats. By selling 6 goats and 8 pigs to buy 5 cows, there is a deficit of 600 cash. What is the price of a cow, a goat and a pig? [Fra oversættelsen nævnt ovenfor, side 235]

Opstil ligningerne med moderne symbolik på samme form som i det første problem, så *fang cheng* metoden kan anvendes til løsning.

d) Kinesernes gennemførelse af løsningsalgoritmen foregik på et regnebræt ved hjælp af regnepinde (se forklaringen på det anvendte talsystem i Side Bar 1.2 [Katz 1993, p. 6; 1998, p. 7]). For eksempel ville ligningssystemet fra a) give anledning til følgende startssituation på regnebrættet:



Lav et regnebræt og brug fx tændstikker som regnepinde. Følg de første skridt af *fang cheng* metoden anvendt på ligningssystemet i kildeuddraget på dit regnebræt.

e) Idet det oplyses, at negative tal blev repræsenterede med røde pinde og positive tal med sorte pinde på regnebrættet, skal man angive startssituationen på regnebrættet ved løsning af ligningssystemet i c). Brug farvekridt. Hvordan repræsenteres nul på regnebrættet?

f) Har du en forklaring på, hvorfor kineserne skrev ligningerne lodret, mens vi skriver dem vandret?

Problem 1

> There are 3 bundles of top grade cereal, 2 bundles of medium grade and 1 bundle of low grade, yielding 39 *dou*[1] [of grain][2] as *shi* (absolute term); 2 bundles of top grade, 3 bundles of medium grade and 1 bundle of low grade yield 34 *dou* as *shi*; while 1 bundle of top grade, 2 bundles of medium grade and 3 bundle of low grade yield 26 *dou* as *shi*. Find the measure [of grains] contained in each bundle of the three grades of cereal.
>
> Answer: One bundle of top grade contains $9\frac{1}{4}$ *dou*; one bundle of medium grade, $4\frac{1}{4}$ *dou*; and one bundle of low grade, $2\frac{3}{4}$ *dou*.

[...] The general description of *fang cheng* in Liu Hui's words is as follows:[3]

> The term *cheng* here means to compute according to a certain process. When a number of things are put together, their various quantities are arranged in different positions [of a column], and their respective total is the *shi*. Let each column show the rates. If there are two things, set up two columns, three things three columns, and so on. The number of things determines the number of columns to be set up. As the columns are arranged in this manner, the method of computation is, therefore, known as 'calculation by tabulation'. The rates in one column must necessarily vary with those in the columns to its left or right as they are formed according to specific data. This is a general method which may not be easily understood.

The method of the above problem from the *Jiu zhang* is given below and we have divided this into nine steps. In each step, the Chinese characters are printed

[1] I artiklen er de kinesiske tegn gengivet i en række tilfælde, men de er udeladt her.
[2] Phrases within square brackets are additions which are not in the text.
[3] This and all other quoted passages in Section 4 are from Qian (ed.), *Suanjing*, 221-223.

first,[4] followed by its translation. In places where clarification is needed Liu Hui's comments are given; our explanation follows with reference to the accompanied tabulations.

Step 1

> Place 3 bundles of top grade cereal, 2 bundles of medium grade, one bundle of low grade with their yield, 39 *dou*, as *shi* in the column on the right. Set up the central and left columns in the same manner as the right column.

[. . .]
Step 2

> Take the number representing top grade cereal in the right column to multiply each of the numbers in the central column and use [the method of] direct subtractions.

Liu Hui's comments:

> The aim of the method is to subtract repeatedly smaller numbers in one column from the bigger numbers in another column so that the number in the top position will be got rid of. When the top position becomes void, this means that the column is short of one thing. This manner of mutual subtraction does not affect the calculation of the remaining numbers, because by taking away the number in the top position, the amount of the thing concerned is also subtracted from the *shi*. Hence, by subtracting directly numbers in columns on left and right and by examining positive (*zheng*) and negative (*fu*) numbers, we arrive at the desired results. The aim of first multiplying the numbers in the central column by the number representing top grade cereal in the right column is to balance the terms (*qi tong*). This balance of terms is to enable direct subtractions of the right column from the central column.

[. . .]
Step 3

> Similarly, multiply the numbers in the next column [that is, the left column, by the number representing top grade cereal in the right column], and once again use [the method of] direct subtractions.

Liu Hui's comments:

> The number at the top in the left column is thus got rid of.

[4] Disse er som nævnt udeladt i gengivelsen her.

[...]
Step 4

> Next, multiply the numbers in the left column by the remaining number representing medium grade cereal in the central column and use [the method of] direct subtractions.

Liu Hui's comments:

> This mutual subtraction of the two columns enables the number representing medium grade cereal [in the left column] to disappear.

[...]
Step 5

> What remains in the left column is the number representing low grade cereal [and the *shi*]. The upper number is taken as the *fa* (divisor) and the lower number as the *shi* (dividend). The *shi* here means the *shi* for low grade cereal.

Liu Hui's comments:

> With both the top and medium grades of cereal taken away [in the left column], the remaining number represents the *shi* for low grade cereal and not the *shi* of one bundle. If we want to obtain the *shi* of one bundle, we take the number of the bundles as the *fa* (divisor).

Our explanation: The *shi* for low grade cereal = 99.

Step 6

> To find the measure of grains of medium grade cereal, multiply the *shi* in the central column by the *fa* [of the left column], and subtract the *shi* for low grade cereal from the product.

Liu Hui's comments:

> The *shi* in the central column is actually the total amount of both the medium grade and low grade cereal in that column. As the measure per bundle of low grade cereal has already been shown in the left column, the next step is to find the measure per bundle of medium grade cereal in the central column. Subtract first the displayed *shi* (*lie shi*) from the *shi* below in the central column. But as [the denominator of the central column] is not the same as the *fa*, which is the denominator of the measure per bundle of low grade cereal in the left column, we have to make it the same by multiplying [the *shi*] in the central column by the *fa*. The *fa* is now the denominator when the *shi* for low grade cereal is subtracted from this product. When

> we multiply the number of bundles of low grade cereal [in the central column] by the *shi* of low grade cereal [of the left column], we obtain the displayed *shi* (*lie shi*) for low grade cereal [in the central column]. Subtract this displayed *shi* from the *shi* [of central column, which has been multiplied by the *fa* of the left column], to obtain the *shi* corresponding to medium grade cereal.

Our explanation: [...]

$$\underset{shi}{24} \times \underset{fa}{36} - \underset{lie\ shi}{99 \times 1} = 765$$

Step 7

> The remainder is divided by the number of bundles of medium grade cereal in the central column, yielding the *shi* for medium grade cereal.

Liu Hui's comments:

> The *shi* thus yielded corresponds to the position for medium grade cereal. In order to find the measure [of medium grade] per bundle, this has to be divided by the number of bundles, [or *fa*, of the left column].

Our explanation: The *shi* for medium grade cereal $= 765/5 = 153$.

Step 8

> To find the measure for top grade cereal, multiply as before, the *shi* in the right column by the *fa* [of the left column], and subtract from it the respective *shi* for low and medium grade.

Liu Hui's comments:

> The total *shi* of the three grades of cereal is given in the right column. Now, as the *shi* for low and medium grades are known, they are multiplied by their corresponding numbers of bundles in the right column. Subtract, as before, these two displayed *shi* (*lie shi*) from the *shi* in the right column, [which has been multiplied by the *fa*].

Our explanation: [...]

$$\underset{shi}{39} \times \underset{fa}{36} - \underset{lie\ shi}{99 \times 1} - \underset{lie\ shi}{153 \times 2} = 999$$

Step 9

> The remainder is divided by the number of bundles of top grade cereal [in the right column], yielding the *shi* for top grade cereal. The *shi* for all grades are each divided by the *fa* to yield the measures per bundle of the respective grades.

Liu Hui's comments:

> All the three *shi* have the common *fa* (divisor). If they are not divisible by the *fa*, fractions are formed with the *fa* as denominator. The fractions will then have to be simplified.

Our explanation: The *shi* for top grade cereal $= 999/3 = 333$; $fa = 36$.
One bundle of low grade cereal $= 99/36 = 2\frac{3}{4}$.
One bundle of medium grade cereal $= 153/36 = 4\frac{1}{4}$.
One bundle of top grade cereal $= 333/36 = 9\frac{1}{4}$.
This procedure of leaving the division by the *fa* to the last stage is to avoid dealing with fractional terms in Steps 5 to 8.

Liu Hui also gives his own alternative method of finding the measure of grains per bundle. This is stated after his comments in Step 5 as follows:

> When the numbers in the other two columns are separately multiplied by the number representing low grade cereal [in the left column] and direct subtractions are used, the numbers occupying the positions of low grade cereal will disappear. When each [column] is left with only one type of cereal, divide the *shi* by the number of bundles to yield the measure of grains per bundle. If the computation is considered too complicated to follow, then we should look for other methods and make them known.

Tekst 12: Inkaernes quipu

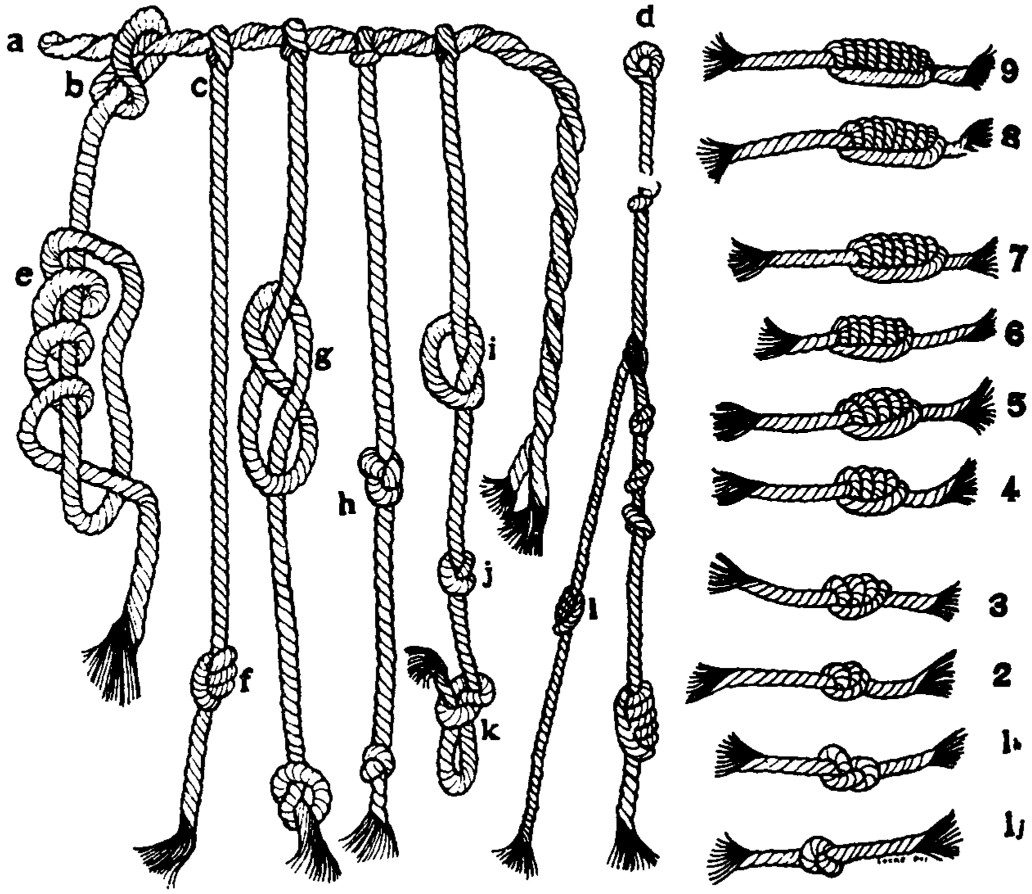
Inkaernes kultur i Sydamerika havde sin storhedstid i 1400-tallet og begyndelsen af 1500-tallet. Inkaerne havde intet skriftssprog, men var alligevel i stand til centralt at administrere en statsdannelse i et enormt landområde. Det manglende skriftssprog betød også, at de ikke havde skrevne talsymboler. De repræsenterede tal som knuder på snore i form af den såkaldte *quipu*.

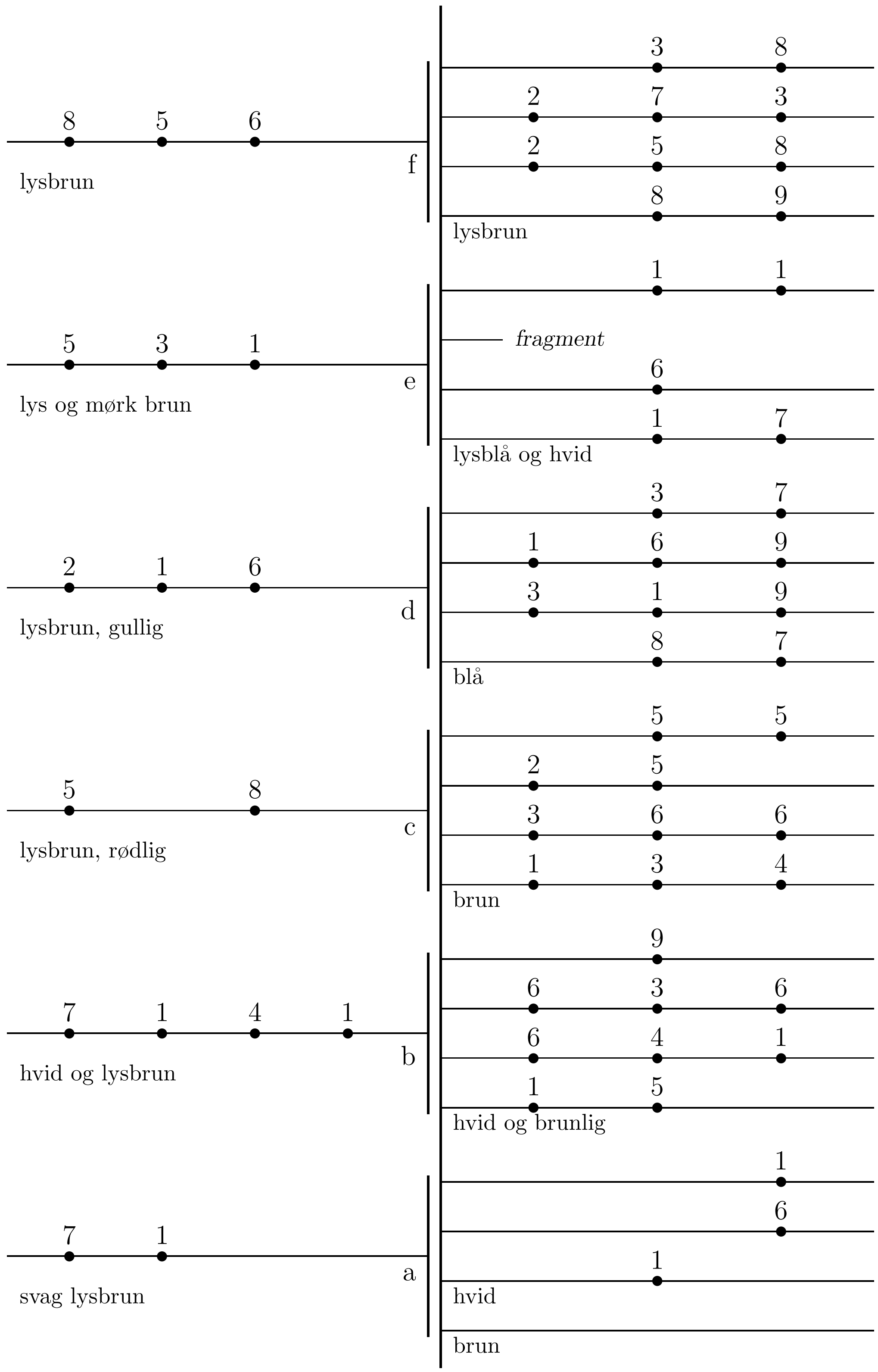
a) Læs beskrivelsen af inkaernes *quipu* i [Katz 1993, pp. 306–08; 1998, pp. 334–36]. På figuren side 34 er vist lidt nærmere, hvordan knuderne på quipuen ser ud. Som vist til højre findes knuder, der er snoet fra 1 til 9 gange. Figuren er fra [Midonick 1965, p. 646].

b) Strukturen af en quipu fra American Museum of National History er vist på figuren på side 35. Denne quipu har seks snoregrupper hver med fem snore. En snor i hver gruppe (den der stikker ud til venstre) adskiller sig fra de øvrige. Snoregrupperne er betegnet a–f på skitsen. Snorenes farve er angivet. De fire snore i en gruppe, der stikker ud til højre, har samme farve, undtagen i gruppe a, hvor den første har sin egen farve. En prik betegner en knude og tallet ud for knuden betegner antallet af snoninger. Hvilke tal er repræsenterede på quipuen og er der noget system i dem?

c) Hvilke knuder har der været på snoren, hvor der kun er et fragment tilbage?

d) Det formodes at quipuerne blev anvendt i Inkarigets administration og at tallene derfor repræsenterer en form for administrative data. Hvilke begrænsninger sætter størrelsen af tallene m.m. på den viste quipu for mulige fortolkninger? Overvej en teori for, hvilke data tallene på den viste quipu kan have repræsenteret.





En principskitse af quipuen med museumsnr. B8713 på
American Museum of National History, Washington D.C.

Tekst 13: Al-Khwārizmī om 2. gradsligninger

Nedenfor følger en oversættelse af al-Khwārizmīs behandling af andengradsligninger i *al-Kitāb al-mukhataṣar fī ḥisāb al-jabr w'al-muqābala* fra begyndelsen af 800-tallet. Den første del er taget fra [Andersen 1986, pp. 92–95], der er en dansk oversættelse af et uddrag af [al-Khwārizmī 1831], mens den anden del er fra [Struik 1969, pp. 58–60] og er en engelsk oversættelse af en latinsk oversættelse af Robert af Chester fra ca. 1140.

a) Opskriv med moderne notation de forskellige typer af ligninger som behandles. Hvorfor er der mere end én type af ligninger? Hvorfor mangler $x^2 + bx + c = 0$?

b) Læs nøje afsnittet om *rødder og kvadrater lig tal* i den danske tekst og beviset herfor i den engelske tekst. Hvordan er forholdet mellem aritmetik og geometri? Sammenlign med fremstillingen i [Katz 1993, p. 230; 1998, p. 246]. Læs omhyggeligt noterne.

c) Sammenlign al-Khwārizmīs behandling med behandlingen af tilsvarende problemer hos babylonerne og Euklid. Diskuter kulturblanding.

d) Hvad siger al-Khwārizmī om antallet af løsninger i tilfældet *kvadrater og tal lig med rødder*?

e) Hvad synes du om fremstillingsformen og notationen?

Al-Khwārizmī

al-Kitāb al-mukhataṣar fī ḥisāb al-jabr w'al-muqābala

I den nådige og barmhjertige Guds navn!

Dette arbejde blev skrevet af Mohammed Ben Musa fra Khowarezm. Han begynder sådan:[1]

Priset være Gud for hans gavmildhed mod dem som fortjener det ved deres gode gerninger; i udførelsen af disse, således som det er foreskrevet af ham for hans tilbedende skabninger, udtrykker vi vor tak og gør os værdige til fortsættelsen af hans nåde, og bevarer os fra forandring, idet vi anerkender hans magt, bøjer os for hans styrke og nærer ærbødighed for hans storhed! Han sendte Mohammed — må Guds velsignelse hvile på ham! — med en profets mission, længe efter at noget sendebud fra oven havde vist sig, da retten var sunket i glemsel, og da den sande levemåde blev søgt forgæves. Gennem ham helbredte han for blindhed og gennem ham frelste han fra fortabelse og gennem ham forøgede han hvad der før var småt og gennem ham samlede han, hvad der før var spredt. Priset være Gud

[1] Denne bemærkning hidrører vel fra en afskriver.

vor Herre! Må hans ære tage til, og må alle hans navne blive helligede; ved siden af ham er der ingen Gud; og må hans velsignelse hvile på profeten Mohammed og på hans efterkommere!
[...]

Den kærlighed til videnskaben, med hvilken Gud har udmærket imanen Al Mamun, de troendes hærfører (ved siden af det kalifat, som han har fundet ham værdig til ved lovlig succession, hvis dragt han har iført ham, og hvis æresbevisninger han har udsmykket ham med), den venlighed og imødekommenhed, som han viser de lærde, den beredvillighed med hvilken han beskytter og understøtter dem i opklaringen af dunkelheder og i fjernelsen af vanskeligheder, har opmuntret mig til at forfatte et kort arbejde om beregning ved hjælp af fuldstændiggørelse og sammenligning, hvor jeg har begrænset det til, hvad der er lettest og nyttigst i regning, sådan noget som folk hele tiden har brug for i tilfælde af arv, opdeling, retssager og handel og i alle deres indbyrdes forretninger, eller hvad der angår landopmåling, kanalgravning, geometrisk beregning og andre forskellige slags ting. Jeg støtter mig til at mine hensigter dermed har været gode og håber, at de lærde vil belønne dem ved gennem deres bønner at skaffe mig den guddommelige nådes udmærkelse; til gengæld herfor, må de mest udsøgte velsignelser og Guds overstrømmende gavmildhed blive deres! Jeg stoler på Gud i denne som enhver anden ting og til ham slår jeg min lid. Han er den ophøjede trones Herre. Må hans velsignelse sænke sig over alle profeterne og de himmelske sendebud!

Da jeg overvejede hvad folk i almindelighed behøver, når de regner, fandt jeg, at det altid er et tal.

Jeg bemærkede også, at ethvert tal er sammensat af enheder og at ethvert tal kan opdeles i enheder.

Endvidere fandt jeg, at ethvert tal mellem en og ti overgår det foregående med én enhed; derefter fordobles eller tredobles ti nøjagtigt som enhederne før blev det. Således opstår tyve, tredive, osv. indtil hundrede; så fordobles og tredobles på samme måde som med enhederne og tierne, op til tusind; så kan man gentage tusind på samme måde op til et hvilket som helst indviklet tal; og så fremdeles til det tælleliges yderste grænse.

Jeg bemærkede, at der er tre slags tal, der kræves, når man beregner ved fuldstændiggørelse og sammenligning, nemlig rødder, kvadrater og simple tal, der ikke har med hverken rod eller kvadrat at gøre.

En rod er en størrelse som ganges med sig selv, bestående af enheder, og det være sig hvad der er herover af tal og hvad der er herunder af brøkdele.[2]

Et kvadrat er hele rodens størrelse ganget med sig selv.

Et simpelt tal er et tal som kan udtrykkes uden henvisning til rod eller kvadrat.

Et tal der hører til en af disse klasser kan være lig med et tal fra en anden

[2] I Robert af Chesters latinske oversættelse er denne passage gengivet som følger: "Af disse er roden så hvadsomhelst der sammensættes af enheder som kan ganges med sig selv eller et hvilketsomhelst tal større end enheden, der ganges med sig selv, eller det som bliver formindsket under enheden når det ganges med sig selv".

klasse, man kan f.eks. sige "kvadrater lig med rødder" eller "kvadrater lig med tal" eller "rødder lig med tal".

Følgende er et eksempel på tilfældet *kvadrater lig med rødder*. "Et kvadrat er lig med fem rødder af det samme"; roden af kvadratet er fem, og kvadratet er femogtyve, som er lig med fem gange dets rod.

Du siger "en tredjedel af kvadratet er lig med fire rødder"; så er hele kvadratet lig med tolv rødder; det er et hundrede og fireogfyrre; og dets rod er tolv.

Eller du siger "fem kvadrater er lig med ti rødder"; så er et kvadrat lig med to rødder; roden af kvadratet er to og dens kvadrat er fire.

På denne måde bliver kvadraterne, hvad enten de er mange eller få (dvs. ganget eller divideret med et vilkårligt tal), reduceret til et enkelt kvadrat; og det samme gøres med de rødder som svarer til dem; det vil sige at de reduceres i samme forhold som kvadraterne.

Angående tilfældet *kvadrater lig med tal:* for eksempel siger du "et kvadrat er lig med ni"; så er det ét kvadrat og dets rod er tre. Eller "fem kvadrater er lig med firs"; så er ét kvadrat lig med en femtedel af firs, som er seksten. Eller "halvdelen af kvadratet er lig med atten"; så er kvadratet seksogtredive og dets rod er seks.

På denne måde reduceres alle kvadrater, multipla eller brøkdele af dem, til et enkelt kvadrat. Hvis der kun er en del af et kvadrat, føjer man til, indtil der er et helt kvadrat; man gør det samme med det tilsvarende tal.

Angående tilfældet *rødder lig med tal:* for eksempel "en rod er lig med tre i tal", så er roden tre og dens kvadrat er ni. Eller "fire rødder er lig med tyve"; så er én rod lig med fem, og det kvadrat der dannes ud fra den er femogtyve. Eller "halvdelen af roden er lig med ti"; så er hele roden lig med tyve, og det kvadrat der dannes ud fra den er fire hundrede.

Jeg fandt at disse tre slags, nemlig rødder, kvadrater og tal, kan kombineres, og således fremkommer der tre blandede typer: "kvadrater og rødder lig med tal", "kvadrater og tal lig med rødder" og "rødder og tal lig med kvadrater".

Rødder og kvadrater lig med tal: For eksempel "et kvadrat og ti rødder af samme beløber sig til niogtredive dirhem";[3] dermed menes, hvad er det kvadrat der efter at være blevet forøget med ti af sine egne rødder beløber sig til niogtredive? Løsningen er denne: man halverer antallet af rødder, hvad der i dette tilfælde giver fem. Dette tal ganger man med sig selv; produktet er femogtyve. Læg niogtredive til; summen er fireogtres. Uddrag nu roden heraf, som er otte, og træk fra denne halvdelen af antallet af rødder, som er fem; resten er tre. Dette er roden af det kvadrat man søger; kvadratet selv er ni.

Løsningen er den samme når to kvadrater eller tre eller flere eller færre er angivet; man reducerer dem til et enkelt kvadrat og i samme forhold reducerer man ligeledes rødderne og det simple tal, der er forbundet hermed.

For eksempel "to kvadrater og ti rødder er lig med otteogfyrre dirhem", det vil sige, hvad må to kvadrater beløbe sig til, når de lagt sammen og lagt til ti

[3] Dirhem: møntenhed (græsk: drakme).

gange roden af en af dem udgør en sum på otteogfyrre dirhem? Først må man reducere de to kvadrater til ét; og man ved, at ét kvadrat ud af to er halvdelen af begge. Reducer så enhver ting der er nævnt i udsagnet til det halve, og man får det samme som hvis spørgsmålet havde været et kvadrat og fem rødder af samme er lig med fireogtyve dirhem. Eller, hvad må et kvadrat beløbe sig til, når det lagt sammen med fem gange dets rod er lig med fireogtyve dirhem? Halvér nu antallet af rødder; halvdelen er to og en halv. Gang dette med sig selv; produktet er seks og en kvart. Læg dette til fireogtyve; summen er tredive og en kvart dirhem. Uddrag roden af dette; den er fem og en halv. Træk fra dette halvdelen af antallet af rødder, det er to og en halv, resten er tre. Dette er roden af kvadratet og kvadratet selv er ni.

Fremgangsmåden er den samme, hvis eksemplet er "halvdelen af et kvadrat og fem rødder er lig med otteogtyve dirhem"; det vil sige, hvad må et kvadrat beløbe sig til, når halvdelen af det lagt til hvad der svarer til fem af dets rødder er lig med otteogtyve dirhem? Det første må være at fuldstændiggøre kvadratet så det beløber sig til ét helt kvadrat. Det får man frem ved at fordoble. Fordobl det derfor, og fordobl også hvad der lægges til det såvel som hvad der er lig med det. Så har man et kvadrat og ti rødder lig med seksoghalvtreds dirhem. Halvér nu rødderne; halvdelen er fem. Gang dette med sig selv; produktet er femogtyve. Læg dette til seksoghalvtreds; summen er enogfirs. Uddrag roden af dette; den er ni. Træk herfra halvdelen af antallet af rødder, som er fem; resten er fire. Dette er roden af det kvadrat som søgtes; kvadratet er seksten og halvdelen af kvadratet er otte.

Man kan gå frem på denne måde, nårsomhelst man møder kvadrater og rødder lig med simple tal; den vil altid føre til svaret.

Kvadrater og tal lig med rødder: For eksempel "et kvadrat og enogtyve i tal er lig med ti rødder af det samme kvadrat". Det vil sige, hvad må et kvadrat beløbe sig til, som, når enogtyve dirhem lægges til det, bliver lig med hvad der svarer til ti rødder af dette kvadrat? Løsning: Halvér antallet af rødder; halvdelen er fem. Gang dette med sig selv; produktet er femogtyve. Træk fra dette de enogtyve som er forbundet med kvadratet; resten er fire. Uddrag roden; den er to. Træk dette fra halvdelen af rødderne, som er fem; resten er tre. Dette er roden af det kvadrat som blev krævet, og kvadratet er ni. Eller man kan lægge roden til halvdelen af rødderne; summen er syv; dette er roden af det kvadrat som blev søgt og kvadratet selv er niogfyrre.

Når man træffer på et eksempel som henviser en til dette tilfælde, skal man forsøge at løse det ved addition, og hvis det ikke går, så går det helt sikkert med subtraktion. For i dette tilfælde kan man anvende både addition og subtraktion, hvad man ikke kan i noget andet af de tre tilfælde i hvilke antallet af rødder må halveres. Og man skal vide, at når man i et spørgsmål der hører ind under dette tilfælde har halveret antallet af rødder og ganget halvdelen med sig selv og fået et produkt, der er mindre end antallet af dirhem forbundet med kvadratet, så er eksemplet umuligt; men hvis produktet er lig med antallet af dirhem i sig selv, så er roden af kvadratet lig med halvdelen af rødderne alene, uden hverken addition eller subtraktion.

I hvert tilfælde, hvor man har to kvadrater eller mere eller mindre, skal man reducere dem til ét helt kvadrat, sådan som jeg forklarede undet det første tilfælde.

Rødder og tal lig med kvadrater: f.eks. "tre rødder og fire simple tal lig med et kvadrat". Løsning: Halvér rødderne; halvdelen er en og en halv. Gang dette med sig selv; produktet er to og en kvart. Læg dette til de fire; summen er seks og en kvart. Uddrag roden; den er to og en halv. Læg dette til halvdelen af rødderne, som var en og en halv; summen er fire. Dette er roden af kvadratet, og kvadratet er seksten.

Nårsomhelst man møder et multiplum eller en brøkdel af et kvadrat skal man reducere det til ét helt kvadrat.

Disse er de seks tilfælde som jeg nævnte i indledningen til denne bog. De er nu blevet forklaret. Jeg har vist, at tre af dem ikke kræver at rødderne halveres og jeg har undervist i, hvordan de må løses. Hvad de tre øvrige angår, i hvilke halvering af rødder er nødvendig, mener jeg det er passende at forklare dem mere nøjagtigt i særskilte afsnit, hvor der angives en figur for hvert tilfælde for at udpege årsagerne til halvering.
[. . .]

We have said enough, says Al-Khowarizmi, so far as numbers are concerned, about the six types of equations. Now, however, it is necessary that we should demonstrate geometrically the truth of the same problems which we have explained in numbers. Therefore our first proposition is this, that a square and 10 roots equal 39 units.

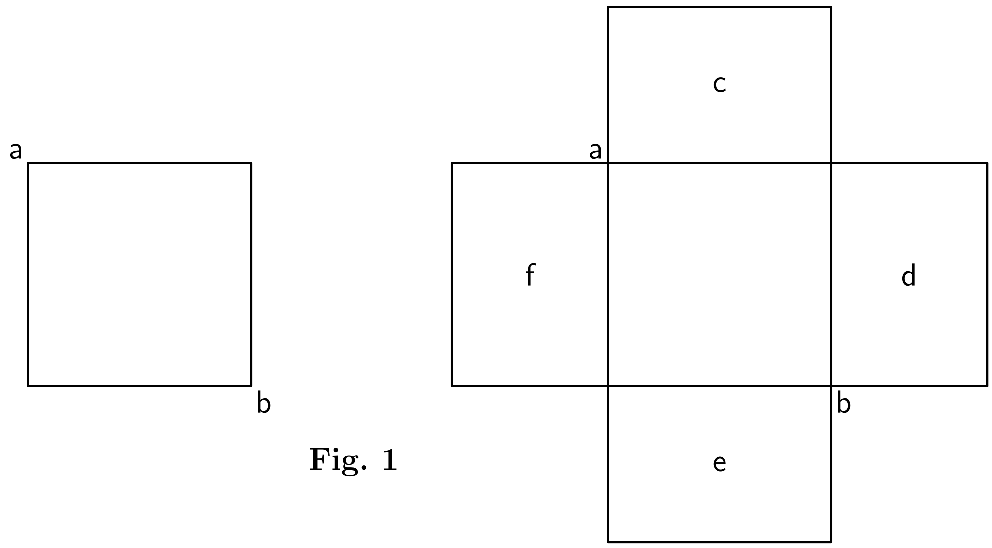
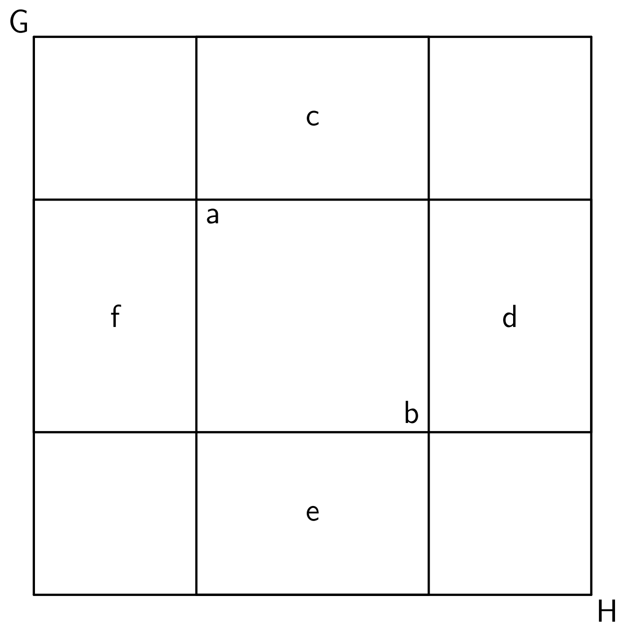


Fig. 1

The proof is that we construct [Fig. 1] a square of unknown sides, and let this square figure represent the square (second power of the unknown) which together with its root you wish to find. Let the square, then be *ab*, of which any side represents one root. When we multiply any side of this by a number (or numbers) it is evident that that which results from the multiplication will be a number of roots equal to the root of the same number (of the square). Since then ten roots were proposed with the square, we take a fourth part of the number ten and apply to each side of the square an area of equidistant sides, of which the length should be the same as the length of the square first described and the breadth $2\frac{1}{2}$, which is a fourth part of 10. Therefore four areas of equidistant sides are applied to the first square, *ab*. Of each of these the length is the length of one root of the square *ab* and also the breadth of each is $2\frac{1}{2}$, as we have just said. These now are the areas c, d, e, f. Therefore it follows from what we have said that there will be four areas having sides of unequal length, which also are regarded as unknown. The size of the areas in each of the four corners, which is found by multiplying $2\frac{1}{2}$ by $2\frac{1}{2}$, completes that which is lacking in the larger or whole area. Whence it is that we complete the drawing of the larger area by the addition of the four products, each $2\frac{1}{2}$ by $2\frac{1}{2}$; the whole of this multiplication gives 25.

And now it is evident that the first square figure, which represents the square of the unknown [x^2], and the four surrounding areas [$10x$] make 39. When we add 25 to this, that is, the four smaller squares which indeed are placed at the four angles of the square *ab*, the drawing of the larger square, called GH, is completed [Fig. 2]. Whence also the sum total of this is 64, of which 8 is the root, and by this is designated one side of the completed figure. Therefore when we subtract from eight twice the fourth part of 10, which is placed at the extremities of the larger square GH, there will remain but 3. Five being subtracted from 8, 3 necessarily remains, which is equal to one side of the first square *ab*.

Fig. 2



This three then expresses one root of the square figure, that is, one root of the proposed square of the unknown, and 9 the square itself. Hence we take half of ten and multiply this by itself. We then add the whole product of the multiplication to 39, that the drawing of the larger square GH may be completed; for the lack of the four corners rendered incomplete the drawing of the whole of this square. Now it is evident that the fourth part of any number multiplied by itself and then multiplied by four gives the same number as half of the number multiplied by itself. Therefore if half of the root is multiplied by itself, the sum total of this multiplication will wipe out, equal, or cancel the multiplication of the fourth part by itself and then by four.

Tekst 14: Isidore om matematik

Udtrykket "den mørke middelalder" anvendes i mange lidt ældre historiebøger til beskrivelse af det tilbageskridt, som kulturen og civilisationen angiveligt tog i middelalderen (ca. 500–1400) i Europa i forhold til niveauet i antikken. Nyere forskning har vist, at der langt fra var tale om tilbageskridt på alle områder, men for europæisk videnskab og herunder matematik er betegnelsen passende for i hvert fald perioden 500–1100. Til illustration af dette bringes udklip af behandlingen af matematikken i *Etymologiae*, bog III af Isidore af Sevilla fra det 7. århundrede efter den engelske oversættelse i [Grant 1974, pp. 3–9]. *Etymologiae* var et slags lexicon over datidens viden.

Grant starter med at konstatere, at meget af indholdet er fantastiske ordafledninger af videnskabelige udtryk, og at Isidore er højst upålidelig, når han citerer fra andre. Han fortsætter:

> [...] it is depressing to learn that Isidore's *Etymologies* "was one of the most widely read books for the next thousand years; [...]" In the selections from Isidore which follow, the reader will see what passed for science, mathematics, and knowledge of the physical world for many centuries. For science, it was truly a dark age. The original treatises of Greek science had, for the most part, been left untranslated. The meager scientific knowledge that came across into Latin was derived from a handbook tradition that went back ultimately to the Hellenistic period. Thus, Isidore was the hapless heir of a drastically diluted scientific heritage. He was rarely better than his sources, and occasionally much worse. [Grant 1974, p. 3]

a) Gengiv Isidores klassifikation af de naturlige tal.

b) Find steder, hvor Isidore formentlig ikke har forstået, hvad han skriver om. Her kan det eventuelt være nyttigt at kigge i redaktørens noter.

c) Hvad angives som motivation til at studere matematik hos Isidore?

d) Hvad synes du om de "historiske" bemærkninger om de matematiske emner (i kapitel 2 og 10) og teksten som helhed?

Book III
On mathematics
[preface]

Mathematics is called in Latin *doctrinalis scientia* (that is, a theoretical science). It considers abstract quantity. For that is abstract quantity which we treat by reason alone, separating it by the intellect from the material or from other nonessentials, as for example, equal, unequal, or the like. And there are four sorts of mathematics, namely, arithmetic, geometry, music, and astronomy.[1] Arithmetic is the science of quantity numerable in itself. Geometry is the science of magnitude and forms. Music is the science that treats of numbers that are found in sounds. Astronomy is the science that contemplates the courses of the heavenly bodies and their figures, and all the phenomena of the stars. These sciences we shall next describe at a little greater length in order that their significance may be fully shown.[2]

Chapter 1. On the name of the science of arithmetic

1. Arithmetic is the science of numbers. For the Greeks call number ἀριθμός. The writers of secular literature have decided that it is the first among the mathematical sciences since it needs no other science for its own existence.

[1] These four mathematical sciences were customarily designated as the *quadrivium* and formed the scientific part of the traditional seven liberal arts. The remaining three, called the *trivium*, consisted of grammar, rhetoric, and dialectic (or logic). The concept of seven liberal arts—that is, *artes liberalis*, studies fit for a free man as opposed to a slave—can be traced to the Greeks as far back as the fourth century B.C. It was Martianus Capella (fl. 410–439), however, in his tremendously influential book *The Mariage of Mercury and Philology*, who canonized the seven liberal arts for the Latin medieval tradition. Isidore is but following this tradition, which he also helps to establish.

It should be noted that Brehaut's translation was made from DuBreul's edition of Isidore's works published in Paris in 1601. In the more recent two-volume edition of the *Etymologies* (Oxford: Clarendon Press, 1911) by W. M. Lindsay, music appears before geometry in this sentence and is described immediately after arithmetic a few sentences below. Such trivial differences will be ignored.

[2] The substance, and sometimes the very words, of this paragraph were taken from Cassiodorus' section "On Mathematics" in his *An Introduction to Divine and Human Readings*, translated by L. W. Jones (New York: Columbia University Press, 1946), pp. 178–179. Almost all of what Isidore writes on arithmetic was taken from Cassiodorus, who in turn drew largely upon Boethius' *Arithmetic*.

2. But music and geometry and astronomy, which follow, need its aid in order to be and exist.

Chapter 2. On the writers

1. They say that Pythagoras was the first among the Greeks to write of the science of number, and that it was later described more fully by Nicomachus, whose work Apuleius first, and then Boethius, translated into Latin.[3]
[. . .]

Chapter 4. What numbers signify

1. The science of number must not be despised. For in many passages of the holy scriptures it is manifest what great mystery they contain. For it is not said in vain in the praises of God (Book of Wisdom 11:21): "but thou hast ordered all things in measure, and number, and weight."[4] For the senarius, which is perfect in respect to its parts,[5] declares the perfection of the universe by a certain meaning of its number. In like manner, too, the forty days which Moses and Elias and the Lord himself fasted are not understood without an understanding of number.
[. . .]

3. So, too, other numbers appear in the holy scriptures whose nature none but experts in this art can wisely declare the meaning of. It is granted to us, too, to depend in some part upon the science of numbers, since we learn the hours by means of it, reckon the course of the months, and learn the time of the returning year. Through number, indeed, we are instructed in order not to be confounded. Take number from all things and all things perish. Take calculation from the world and all is enveloped in dark ignorance, nor can he who does not know the way to reckon be distinguished from the rest of the animals.

Chapter 5. On the first division into even and odd

1. Number is divided into even and odd. Even number is divided into the following: evenly even, evenly uneven, unevenly even, and unevenly uneven. Odd number is divided into the following: prime and incomposite, composite, and a third intermediate class *(mediocris)* which in a certain way is prime and incomposite but in another way secondary and composite.

[3] This paragraph is drawn directly from Cassiodorus (see Jones, p. 187).

[4] I have replaced the Latin text of this Biblical quotation with the English translation from the Douay version. This quotation was widely cited as justification for the study of mathematics.

[5] Six was considered a perfect number because it equals the sum of all its factors.

2. An even number is that which can be divided into two equal parts, as II, IV, VIII.[6] An odd number is that which cannot be divided into equal parts, there being one in the middle which is either too little or too much, as III, V, VII, IX, and so on.

3. Evenly even number is that which is divided equally into even number, until it comes to indivisible unity, as for example, LXIV has a half XXXII, this again XVI; XVI, VIII; eight, IV; four, II; two, one, which is single and indivisible.

4. Evenly uneven is that which admits of division into equal parts, but its parts soon remain indivisible, as VI, X, XXXVIII, and L, for presently, when you divide such a number, you run upon a number which you cannot halve.[7]

5. Unevenly even number is that whose halves can be divided again but do not go on to unity, as XXIV. For this number being divided in half makes XII, divided again VI, and again three; and this part does not admit of further division, but before unity a limit is found which you cannot halve.

6. Unevenly uneven is that which is measured unevenly by an uneven number, as XXV, XLIX; which, being uneven numbers, are divided also by uneven factors, as, seven times seven, XLIX, and five times five, XXV. Of odd numbers some are prime, some composite, some intermediate *(mediocris)*.

7. Simple [or prime] numbers are those which have no other part [or factor] except unity alone, as three has only a third, five only a fifth, seven only a seventh,[8] for these have only one factor.

Composite numbers are those which are not only measured by unity, but are produced[9] by another number, as nine, *(novem)*, XV, XXI, [XXV]. For we say three times three *(ter terni)* [are IX], and seven times three *(septies terni)* [are XXI], and three times five *(ter quini)* [are XV], and five times five *(quinquies quini)* [are XXV].

8. Intermediate *(mediocris)* numbers are those which in a certain fashion seem prime and incomposite and in another fashion secondary and composite. For example, when nine *(novem)* is compared with XXV, it is prime and incomposite because it has no common number except the monad [or unit] only; but if it is compared with fifteen *(quindecim)*, it is secondary and composite since there is in it a common number in addition to unity, that is, the number three (because

[6] In Lindsay's Latin edition of the *Etymologies*, Roman and rhetorical numerals are used indiscriminately. To convey a sense of this inconsistency, I have expressed all numbers as they appear in the text.

[7] According to Cassiodorus, an "evenly uneven" (Jones renders it as "even-times-odd") number "is one whose similar division into two equal parts can occur but once; for example, 10, whose half is 5. . . . " (Jones, p. 181). Although Isidore's examples agree with this definition, he fails to restrict his version to a single division.

[8] Here Isidore has slightly altered and made more cumbersome the remark of Cassiodorus, who says merely that a prime number "is one which can be divided by unity alone; for example, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, and the like" (Jones, p. 182). Isidore, however, speaks of 1/3 of 3 as the factor of 3; 1/5 of 5, and so on.

[9] Cassiodorus properly says that such numbers can be divided by unity and another number. But Isidore says obscurely that they can also be "produced" *(procreantur)* by another number.

three times three makes nine, and three times five make fifteen).

9. Likewise of even numbers some are excessive, others defective, others perfect. Excessive are those whose factors being added together exceed its total, as for example, twelve. For it has five parts [or factors]: a twelfth, which is one; a sixth, which is two; a fourth, which is three; a third, which is four; a half, which is six. For one and two and three and four and six being added together make XVI, which is far in excess of twelve. And there are many similar kinds, as eighteen, and many such.

10. Defective numbers are those which being reckoned by their factors make a less total, as for example, X, which has three parts: a tenth, which is one; a fifth, which is two; and a half, which is five. ...

11. The perfect number is that which is equaled by its factors, as six, for it has three parts: a sixth, a third, and a half. Now a sixth of it is one, a third is two, a half is three. When these parts are summed—that is, one, two, and three—they perfect and complete the [number] six. The perfect numbers are, under ten, VI; under a hundred, XXVIII; under a thousand, CCCCXCVI.

[...]

Chapter 9. That infinite numbers exist

1. It is most certain that there are infinite numbers, since at whatever number you think an end must be made I say not only that it can be increased by the addition of one, but, however great it is, and however large a multitude it contains, by the very method and science of numbers it can not only be doubled but even multiplied.

2. Each number is limited by its own proper qualities, so that no one of them can be equal to any other. Therefore, in relation to one another they are unequal and diverse, and the separate numbers are each finite, and all are infinite.

Chapter 10. On the inventors of geometry and its name

1. The science of geometry is said to have been discovered first by the Egyptians, because when the Nile overflowed and all their lands were overspread with mud, its origin in the division of the land by lines and measurements gave the name to the art. And later, being carried further by the keenness of the philosophers, it measured the spaces of the sea, the heavens, and the air.

2. For, having their attention aroused, students began to search into the spaces of the heavens after measuring the earth; how far the moon was from the earth, the sun itself from the moon, and how great a measure extended to the summit of the sky; and thus they laid off in numbers of stades with probable reason the very distances of the sky and the circuit of the earth.

3. But since this science arose from the measuring of the earth, it took its name also from its beginning. For *geometria* is so named from "earth" and "measuring". For the earth is called $\gamma\hat{\eta}$ in Greek, and measuring, $\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\alpha$. The art of this science embraces lines, intervals, magnitudes, and figures; and in figures, dimensions and numbers.

Chapter 11. On the fourfold division of geometry

1. The fourfold division of geometry is into plane figures, numerable magnitude, rational magnitude, and solid figures.

2. Plane figures are those which are contained by length and breadth, and which are five in number according to Plato.[10] Numerable magnitude is that which can be divided by the numbers of arithmetic.

3. Rational magnitudes are those whose measures we can know, and irrational, those the amount of whose measurement is not known.

4. Solid figures are those that are contained by length, breadth, and thickness,[11] as [for example], a cube; and there are five species in a plane.[12]

Chapter 12. On the figures of geometry

1. The first of these, the circle, is a plane figure which is called a circumference, in the middle of which is a point upon which everything converges *(cuncta convergunt)*, which geometers call the center and the Latins call the point of the circle.

2. A quadrilateral figure is a square in a plane which consists of four straight lines, thus.[13] A dianatheton grammon is a plane figure,[14] thus. An orthogonium, that is, a right angle *(rectiangulum)*, is a plane figure, for it is a triangle and has a right angle.[15] The plane figure *isopleuros* is straight and constructed underneath.[16]

---

[10]It is probable that Isidore has corrupted the five regular solids, which Plato discusses in *Timaeus* 53C–55C, into five types of plane figures.

[11]Up to this point Isidore has taken the substance of his geometry from Cassiodorus (see Jones, p. 198). Since Cassiodorus has little more than this, Isidore could not have derived the rest of his geometrical section from him.

[12]The text seems defective at this point. It is unclear whether Isidore intended to declare here that there are five species of solid figures in a plane(!) or whether, after completing his definition of solid figure and having exemplified it by the cube, he wishes now to take up the five species of plane figure mentioned in paragraph 2.

[13] Here again Isidore equates a genus of geometric figure, namely four-sided figure, with a particular type of four-sided figure, a square. Here and elsewhere in this chapter, figures were to be inserted. Lindsay's text does not contain them.

[14]The figure intended here is unclear to me.

[15]Isidore seems to equate right angle with triangle and to commit the same error mentioned above in note 13.

[16]Because Isidore's meaning is so obscure, I present the Latin: "Isopleuros figura plana, recta et subter constituta."

3. A sphere is a figure of rounded form equal in all its parts.

4. A cube is a proper solid figure which is contained by length, breadth, and thickness.[17] A cylinder is a square figure with a semicircle above.[18]

5. A cone *(conon)* is a solid figure which narrows from a broad base like a right-angled triangle.[19]

6. A pyramid is a figure which narrows from a broad base to a point like fire.[20] For among the Greeks fire is called $\pi\hat{\upsilon}\rho$.

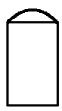
7. Furthermore, just as all number is [contained] below X,[21] so is the outline of all figures contained within a circle.[22] The first figure of this kind is a point, which has no part.[23] The second is a line, which has length besides breadth. A straight line is that which lies evenly in respect to its points. A surface is that which has length and breadth only. Lines are the limits [or boundaries] of surfaces, and the forms [or shapes] in the ten figures mentioned above are not posited because they are found among them.[24]

---

[17] This definition fails to distinguish a cube from any other kind of solid and is identical with Isidore's definition of solid figures given in his chapter 11, paragraph 4. In *Elements* XIII, Definition 25, Euclid defines it as follows: "A cube is a solid figure contained by six equal squares." The translation is that of Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2d ed. (New York: Dover, 1956), III, 261.

[18] How Isidore obtained or arrived at this incredible definition is a mystery. Perhaps it was suggested upon observing the following kind of two-dimensional representation of a cylinder:

Fig. 2



Or perhaps in some manner this is a distortion of Euclid's definition of cylinder (*Elements* XI, Def. 21): "When, one side of those about the right angle in a rectangular parallelogram remaining fixed, the parallelogram is carried round and restored again to the same position from which it began to be moved, the figure so comprehended is a cylinder" (Heath p. 262). Although the "rectangular parallelogram" may have been distorted to a square, it is difficult to see how the semicircle on the square could have been extracted from this.

[19] Compare Euclid's definition (*Elements* XIII, Def. 18): "When, one side of those about the right angle in a right-angled triangle remaining fixed, the triangle is carried round and restored again to the same position from which it began to be moved, the figure so comprehended is a cone" (Heath, p. 262).

[20] It is again instructive to compare Euclid's definition (*Elements* XIII, Def. 12): "A pyramid is a solid figure, contained by planes, which is constructed from one plane to one point" (Heath, p. 262).

[21] Isidore probably means that all numbers can be generated from the numbers 1 through 9.

[22] Here Isidore simply means that these figures can be inscribed in a circle. For the solid figures, however, a sphere is required.

[23] I fail to see how this sentence relates to what has immediately preceded. Brehaut solved the problem by omitting "The first figure of this kind is..." and converting the rest to "A point is that which has no part." Thus, the embarrassment of designing a point as a particular kind of figure is avoided.

[24] Isidore's meaning is wholly unclear. Are the shapes of the figures not mentioned because, for Isidore, they are all inscribed in circles? The point is hardly worth further discussion.

Tekst 15: Oresme om grafisk fremstilling

Præsten Nicole Oresme levede i 1300-tallet og var tilknyttet universitetet i Paris. Nedenfor er givet et lille uddrag fra hans manuskript *Quaestiones super geometriam Euclides* efter den engelske oversættelse i [Struik 1969, pp. 135–38].

Udgangspunktet er Aristoteles' kategorier af kvantiteter og kvaliteter. Eksempler på kvaliteter er visdom, varme og bevægelse. I spørgsmål 10 som er gengivet nedenfor fremsætter Oresme en teori for *latitudines* til beskrivelse af kvaliteter. Hans idé har flere lighedspunkter med vores grafiske fremstilling af funktioner. Ud af en *base* afsættes kvalitetens *extensio* eller *longitudo* svarende til vores abscisse. Kvalitetens *intensio* eller *latitudo* repræsenteres ved *altitude* svarende til vores ordinat. *Summit line* svarer til funktionens graf og er altså ikke nødvendigvis en ret linie (se eventuelt [Katz 1993, p. 295; 1998, pp. 319–20]).

a) Tegn en uniform flade, en uniform difform flade og en difform difform flade.

b) Oversæt konklusion 5.

c) I andre skrifter betragtede Oresme specielt kvaliteten bevægelse, hvor longitudo er tiden, mens latitudo betegner hastigheden af et punkt i en retlinet bevægelse. Hvilken størrelse repræsenterer i så fald den gennemløbne strækning? Hvad betyder konklusion 5 i dette tilfælde?

d) Hvorfra henter Oresme autoritet til at underbygge metoden?

Nicole Oresme
Quaestiones super geometriam Euclides

(*a*) The altitude of a surface is judged by the line drawn perpendicular to the base, as might appear from a figure.

(*b*) A surface is called uniformly or equally high if all the lines by which the altitude is judged are equal; a surface is called difformly high if these lines are unequal and extend up to a line not parallel to the base (the summit line).

(*c*) The altitude is called uniformly difform if every three or more equidistant altitudes exceed one another in an arithmetical proportion [Fig. 1], i.e., the first extends as much above the second as the second above the third, from which it appears that the summit line is a straight line which is not parallel to the base.

(*d*) The altitude is called difformly difform if the altitudes do not exceed one another in this way. In that case their summit line is not straight and the difformity in altitude varies with the variation of this summit line.

[...]

(*a*) Of a quality two things are represented, *viz.* the *intensio per gradum* and the *extensio per subjectum*, and consequently such a quality is imagined to have two dimensions.

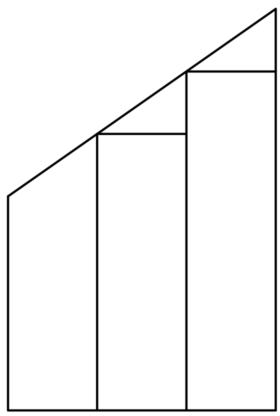


Fig. 1

[H. L. L. Busard remarks that this means that the extensity of an extended quality of any kind can be designated by a line or a plane (called the longitude) described in the subject. The intensity of the quality from point to point in the subject has to be represented by lines (called latitudes) erected perpendicular to the longitude of the same quality. The latitude thus acts as a variable ordinate in a system of coordinates, while the longitude is not to be identified with the variable abscissa; there is only one longitude with an infinite number of latitudes.[1]]

For this reason it is sometimes said that a quality has a latitude and a longitude instead of an intensity and an extensity.

(*b*) A quality may be imagined as belonging to a point or an indivisible subject, such as the soul, but also to a line and even to a surface and a body.

Conclusion 1: The quality of a point or an indivisible subject can be represented by a line, because it has only one dimension, *viz.* intensity. From this it follows that such a quality, such as knowledge or virtue, cannot be called uniform or difform, just as a line is not called uniform or difform. It also follows that properly speaking one cannot refer to the latitude of knowledge and virtue, because no longitude can be associated with it, whereas every latitude presupposes a longitude.

Conclusion 2: The quality of a line can be represented by a surface, of which the longitude is the rectilineal extensity of the subject and the latitude the intensity, which is represented by perpendiculars erected on the subject-line.

Conclusion 3: Similarly the quality of a surface can be represented by a body of which the length and the breadth form the extensity of the surface and the depth is the intensity of the quality. For the same reason the quality of a whole body might be represented by a body of which the length and the breadth would be the extensity of the whole body and the depth the intensity of the quality.

However, someone might doubt: If the quality of a line is here represented

[1]The extensity corresponds to an infinity of intensities.

by a surface and the quality of a surface by a body having three dimensions, the quality of a body will no doubt be represented by something having four dimensions in a different kind of quality.

I say that it is not necessary to give a fourth dimension. In fact, if one imagines that a *punctus fluens* causes a line, a line a surface, a surface a body, it is not necessary for a *corpus fluens* to cause a fourth kind of quantity but only a body, and because of this Aristotle, in *De Caelo* I,[2] says that according to this method of representation no passage from a body to a different kind of quantity is possible. In the case under consideration one should reason in the same way.

It is therefore necessary to speak of the quality of a line, and analogously it is considered what has to be said of the quality of a surface or a body.

Conclusion 4: A uniform linear quality can be represented by a rectangle that is uniformly high, in such a way that the base represents the extensity and the summit line is parallel to the base.

A uniformly difform quality can be represented by a surface that is uniformly difformly high, in such a way that the summit line is not parallel to the base. This can be proved: the intensities of the points of the quality are proportional to the altitudes of the perpendiculars erected in the corresponding points of the base.

A quality can be uniformly difform in two ways, just as a surface can be uniformly difformly high in two ways:

(*a*) Such a quality may terminate at zero degree and is then represented by a surface which is uniformly difformly high down to zero, i.e., by a right-angled triangle;

(*b*) Such a quality may terminate at both ends at some degree and is then represented by a quadrilateral, the summit line of which is a straight line not parallel to the base, i.e., by a right-angled trapezium.

Conclusion 5: By means of the above it can be proved that a uniformly difform quality is equal to the medium degree [Fig. 2], i.e., just as great as a uniform quality would be at the degree of the middle point, and this can be proved in the same way as for a surface.[3]

Last conclusion: A difformly difform quality is represented by a surface of which the line representing the subject is the base, while the summit line is a nonstraight line, not parallel to the base. Such a difformity may be imagined in an infinite number of different ways, for the summit line may vary in a great many ways.

However, someone might say: It is not necessary to represent a quality in

[2]This rejection of a fourth dimension is based on Aristotle's *De Caelo*, I, 1; 268a31–268b2. It remains the prevailing attitude in Renaissance days even where, as in Cardan or Viète, quadratic equations are related to planes and cubic equations to solids (see Selections II.3,5). Despite an occasional remark by Pascal, Wallis, and Lagrange, only the nineteenth century took the geometry of four dimensions seriously. See Selections III.3, note 3, and IV.12.

[3]Conclusion 5 is often referred to as the Mertonian rule. See E. J. Dijksterhuis, *The mechanization of the world picture* (Clarendon Press, Oxford, 1961), 197. See also Selection IV.4.

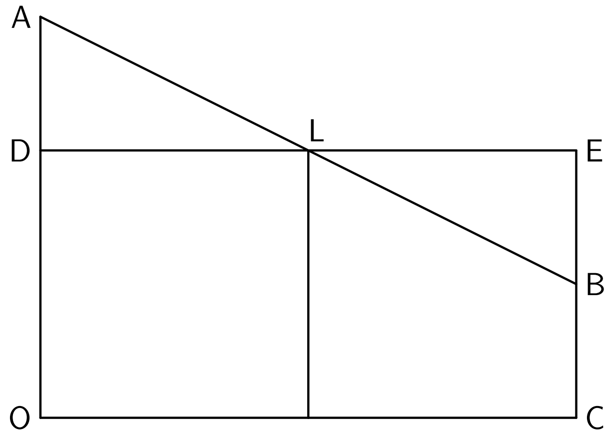


Fig. 2

this way. I say that the representation is good, as also appears in Aristotle,[4] for he represents time by a line. In the same way in *Perspectiva* the *virtus activa* is represented by a triangle.[5] Moreover according to this representation one can understand more easily what is said about uniformly difform qualities, and consequently the representation is good.

[4]Aristotle, *Physica*, IV, 11; 220a4–20. In lines 219b1–2 Aristotle defines time as "numerus motus secundum prius et posterius." Here he tries to explain that the "now-moment," on the one hand, divides time into two parts (past-future), but, on the other hand, makes it continuous. He compares time to a line on which a point makes a division but also constitutes continuity of the line.

[5]The *virtus activa* is the light diffused from the source of light (*lumen*). Later, in Question 17, Oresme concludes: "Such a force or such a light extends uniformly difformly, or in other words: it is a uniformly difform quality. This appears plausible because—since the force does not extend uniformly—it seems to diminish as the distance increases; this diminution has to take place proportionally, i.e., uniformly difformly" [Fig. 3]. The *Perspectiva* mentioned is the one written by Witelo (Vitellio), a Polish mathematician of the thirteenth century, first printed in Nuremberg (1535), a book that was widely read, and on which Kepler wrote a book, *Ad Vitellionem paralipomena* (Frankfurt a. M., 1604).

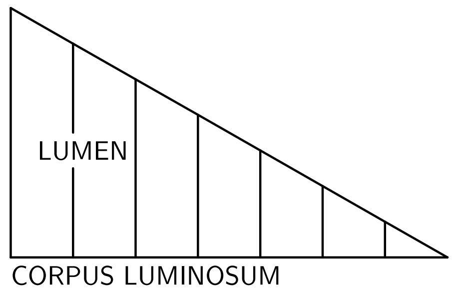


Fig. 3

Tekst 16: Cardano om komplekse tal

De komplekse tal dukkede første gang op i forbindelse med løsningen af ligninger i Cardanos *Ars Magna* fra 1545. I kapitel 37 heri diskuterede Cardano forskellige løsningsteknikker for ligninger. Han opstillede disse som regler. En af dem er gengivet nedenfor. Det er taget fra den engelske oversættelse i [Cardano 1968, pp. 219–20], hvor Cardanos notation er ændret til moderne symboler. Cardanos originale symbolik kan ses på figuren fra den latinske original (fra [Struik 1969, p. 68]) og i [Smith 1959, pp. 201–02].

a) Hvilket ligningssystem ønsker Cardano at løse?

b) Hvilken løsningsalgoritme anvender han?

c) Analysér Cardanos bevis og sammenlign med al-Khwārizmīs behandling af ligninger.

d) Hvilke alternative løsningsforslag fremkommer han med i sidste del af teksten og hvordan er han mon kommet på dem?

CHAPTER XXXVII

On the Rule for Postulating a Negative

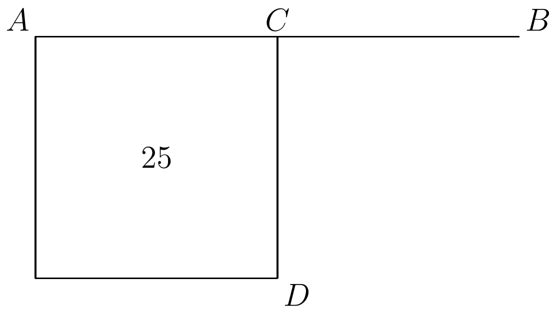
Den første regel, som Cardano angiver, er en speciel måde at håndtere negative løsninger til ligninger på. Derefter angiver han følgende regel:

Rule II

The second species of negative assumption involves the square root of a negative. I will give an example: If it should be said, Divide 10 into two parts the product of which is 30 or 40, it is clear that this case is impossible. Nevertheless, we will work thus: We divide 10 into two equal parts, making each 5. These we square, making 25. Subtract 40, if you will, from the product thus produced, as I showed you in the chapter on operations in the sixth book, leaving a remainder of -15, the square root of which added to or subtracted from 5 gives parts the product of which is 40. These will be $5+\sqrt{-15}$ and $5-\sqrt{-15}$.

Demonstration

In order that a true understanding of this rule may appear, let AB be a line which we will say is 10 and which is divided in two parts, the rectangle based on which must be 40. Forty, however, is four times 10; wherefore we wish to quadruple the whole of AB. Now let AD be the square of AC, one-half of



AB, and from AD subtract $4AB$, ignoring the number.[1] The square root of the remainder, then — if anything remains — added to or subtracted from AC shows the parts. But since such a remainder is negative, you will have to imagine $\sqrt{-15}$ — that is, the difference between AD and $4AB$ — which you add to or subtract from AC, and you will have that which you seek, namely $5+\sqrt{25-40}$ and $5-\sqrt{25-40}$, or $5+\sqrt{-15}$ and $5-\sqrt{-15}$. Putting aside the mental tortures involved,[2] multiply $5+\sqrt{-15}$ by $5-\sqrt{-15}$, making $25-(-15)$ which is $+15$. Hence this product is 40. Yet the nature of AD is not the same as that of 40 or AB, since a surface is far from the nature of a number and from that of a line, though somewhat closer to the latter. This truly is sophisticated,[3] since with it one cannot carry out the operations one can in the case of a pure negative and other [numbers]. [Likewise,] one cannot determine what it [the solution] is by adding the square of one-half the [given] number to the number to be produced and to or from the square root of this sum adding and subtracting half that which is to be divided. For example, in this case you could divide 10 into two parts whose product is 40; add 25, the square of one-half of 10, to 40, making 65; from the square root of this subtract 5 and also add 5 to it; you then have parts with the likeness of $\sqrt{65}+5$ and $\sqrt{65}-5$. [But] while these numbers differ by 10, their sum is $\sqrt{260}$, not 10. So progresses arithmetic subtlety the end of which, as is said, is as refined as it is useless.

[1] *absque numero.*

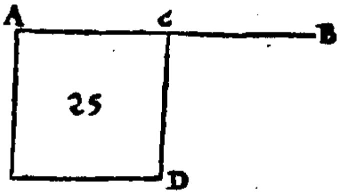
[2] *dismissis incruciationibus.* We may perhaps suspect Cardano of indulging in a play on words here, for this can also be translated "the cross-multiples having canceled out," with the whole sentence then reading, "Multiply $5+\sqrt{-15}$ by $5-\sqrt{-15}$ and, the cross-multiples having canceled out, the result is $25-(-15)$, which is $+15$." *Cf.* the translation of this passage by Professor Vera Sanford in David Eugene Smith, *A Source Book in Mathematics* (New York, 1959 reprint), I, 202.

[3] In the 38th problem of the *Ars Magna Arithemticae*, Cardano remarks: "Note that $\sqrt{9}$ is either $+3$ or -3, for a plus [times a plus] or a minus times a minus yields a plus. Therefore $\sqrt{-9}$ is neither $+3$ nor -3 but is some recondite third sort of thing" (*quaedam tertia natura abscondita*).

exemplum, si quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifestum est, quòd casus seu quæstio est impossibilis, sic tamē operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in se fit 25, auferes ex 25, ipsum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in sexto libro, fiet residuum m: 15, cuius ℞ addita & detracta à 5, ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit A B linea, quę dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarū rectangulum debeat esse 40, est 2
aūt 40 q̄druplū ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, absq; numero, ℞ igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residum est minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id est differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæsitum, scilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, seu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamē A D, non est eadem cū natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamē huic quantitati, quę uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed ℞ 260, & hucusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.



5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̄d. est 40

Tekst 17: Regiomontanus om sfæriske trekanter

Johann Müller, som er kendt under navnet Regiomontanus, skrev i 1464 det første værk, som alene beskæftigede sig med trigonometri. Det havde titlen *De triangulis omnimodis*. Det blev dog først publiceret i 1533. Nedenfor er gengivet et uddrag af Bog IV om sfæriske trekanter efter den engelske oversættelse i [Hughes 1967, pp. 203–27].

En *storcirkel* på en kugleskal er en cirkel som fremkommer som snitkurve mellem kugleskallen og en plan gennem kugleskallens centrum. Oprejses en linie gennem kugleskallens centrum vinkelret på snitplanen vil den skære kugleskallen i to punkter, som er storcirklens *poler.* På en globus er længdegraderne og ækvator eksempler på storcirkler, mens nord- og sydpolen er poler for storcirklen ækvator.

a) Læs sætningerne 1, 2, 3, 6 og 15 og gør dig klart, hvad de siger geometrisk. Det kan være nyttigt at tegne skitser.

b) Hvilken lovmæssighed udleder Regiomontanus for retvinklede hhv. generelle sfæriske trekanter i sætning 16 hhv. sætning 17? Forklar først strukturen af beviset for sætning 16 og derefter detaljerne. Beviset for sætning 17 kan overspringes.

c) Hvad er den tilsvarende lovmæssighed for plane trekanter?

d) I teksten nedenfor er brugt store bogstaver for hjørner, vinkler m.m. mens Regiomontanus brugte små i den latinske original, som man kan se på figurerne (der iøvrigt er taget fra [Smith 1959, pp. 428–30]. Hvorfor tror du, at Regiomontanus bruger bogstaverne i rækkefølgen A, B, G, D, E, Z osv. i stedet for den alfabetiske rækkefølge?

Regiomontanus
Fourth Book of the Triangles

Theorem 1

If you were to drop a great arc from the pole of a great circle in a sphere to its circumference or to an arc of [the circumference], that lowered arc will be a quadrant perpendicular to the circumference, forming two right angles upon the arc to which it falls.
[...]

Theorem 2

If, from some point on the arc of a great circle, a great quadrant emerges orthogonally, its end [point] will be the pole of the circle from which the quadrant emerged; with this [fact], it may be stated that the meeting point of two arcs emerging orthogonally from a third arc is the pole of the circle containing that [third] arc.

[...]

Theorem 3

In every right triangle [the length of] the sides including the right angle compared to [the length of] a quadrant of the circumference and [the size of] the angles opposite these [sides] compared to [the size of] a right angle will have similar relationships.

[What] I mean [is this]. If an angle which is opposite one of the sides including the right angle were equal to a right angle, that side will be equal to a quadrant. If [that angle] is greater than a right [angle], the side will be greater than a quadrant. If [the angle] is less [than a right angle], that [side] will be less than a quarter circumference. Finally, the converse [is true]. [...]

Theorem 6

In every right triangle, if one of the two angles which the side opposite the right angle bears is a right [angle], that side will be a quadrant of the circle. If each of those [two angles] is either obtuse or acute, the mentioned side will be less than a quadrant. But if one of them is obtuse while the other is acute, that side is concluded to be greater [than a quadrant].

[...]

Theorem 15

If, in a sphere, two great circles are inclined toward each other, and if two points are marked on the circumference of one of them or one point [is marked] on the circumference of each, and if a perpendicular arc is drawn from either one of the points to the circumference of the other circle, then the ratio of the sine of the arc that is between one of those points and the point of intersection of the circles to the sine of the perpendicular arc extended from that [same marked point] to the other circle is as the ratio of the sine of the arc found between the other [marked] point and the point of intersection to the sine of the arc drawn from that [second marked] point.

[...]

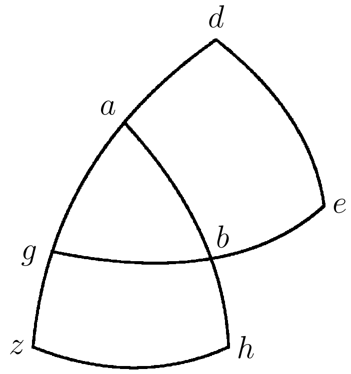
Theorem 16

In every right triangle the ratio of the sines of all the sides to the sines of the angles which [the sides] subtend is the same.

If ABG is a triangle with right $\angle B$, then the ratio of the sine of side AB to the sine of $\angle AGB$ is the same as the ratio of the sine of side BG to the sine of $\angle BAG$ and as the ratio which the sine of side AG has to the sine of the sine of $\angle ABG$, which we will prove thus.

It is necessary that each of the angle A and G be a right angle or that only one of them [be a right angle] or that none [of them be a right angle]. If each of them is a right angle, then, by the hypothesis and Th. [2] above, point A will be the pole of circle BG, B will be the pole of circle AG, and G will be the pole of circle AB. Therefore by definition each of the three mentioned arcs will determine the size of the angle opposite it. Therefore the sine of any one of the three sides and [the sine] of the angle opposite that [side] will be the same, and thus the sines of all the sides to the sines of the angles opposite them will have the same ratio — namely, [that of] equality.

But if only one of the angles A and G is a right [angle], let that [angle] be $\angle G$, for example. Moreover, the hypothesis gave $\angle B$ [to be] a right [angle]. Therefore, by Th. [2] above, A is the pole of circle BG, and, by Th. [1] above, each of the arcs BA and AG is a quadrant of the great circumference. Then by definition each of the arcs AB, BG, and GA will determine the size of the angle opposite itself, and, by the converse of the definition of the sine of an angle, the sine of any side and the angle opposite it will be the same. hence, finally, it will be established that the sines of all the sides to the sines of the angles opposite them have the same ratio — namely, [that] of equality.



But if neither of the angles A and G is given [to be] a right [angle], some one of the three arcs [comprising] the sides cannot be a quadrant of the circumference, as was concluded from Th. [3] above; indeed, they may be in a triplicity [of combinations]. For if each of the angles A and G is acute, by Th. [3] above each of the arcs AB and BG will be less than a quadrant, and thus by Th. [6] above arc AG will be less than a quarter of the circumference. Therefore let arc GA extend beyond A until it becomes quadrant AD,* [and] with its chord [GD], which is the side of the great square, [as polar line] let a great circle be described around point G as pole, intersecting arc GB extended at point E. Finally, let arc AG be extended beyond point G until it becomes quadrant AZ, whose chord [as polar line], rotated around pole A, produces a circle that meets arc AB extended at point H. In this way we have drawn one construction.

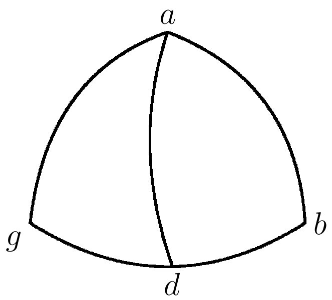
*For AD read GD.

Regiomontanus laver derefter analoge konstruktioner i tilfældene hvor A og G begge er stumpe, og hvor den ene er stump og den anden spids. Det følgende argument gælder derefter alle de tre konstruktioner på én gang.

[...] For since the two circles GD and GE are inclined toward each other, and since on the circumference of circle GD two points are marked from which two perpendiculars AB and DE descend, then, by the preceding [theorem], the ratio of the sine of arc GA to the sine of arc AB is as that of the sine of arc GD to the sine of arc DE, and by recombination, the sine of GA to the sine of GD is as the sine of AB to the sine of DE. Similarly, the two circles AZ and AH are inclined toward each other, and on the circumference of circle AZ two points G and Z are marked, from which two perpendicular arcs GB and ZB† descend. Therefore, by the preceding [theorem], the ratio of the sine of AG to the sine of GB is as that of the sine of AZ to the sine of ZH, and by recombination, the sine of AG to the sine of AZ is as the sine of GB to the sine of ZH. Moreover, the sine of AG is to the sine of AZ as the sine of GA to the sine of GD because each of the arcs AZ and GD is a quadrant. Thus the sine of side AB to the sine of DE and the sine of side BG to the sine of ZH will [both] have the same ratio — namely that of the sine of side AG to the sine of a quadrant. Furthermore, the sine of DE is the sine of $\angle AGB$, for arc DE determines the size of $\angle AGB$ since point G is the pole of circle DE. Similarly the sine of ZH is the sine of $\angle BAG$. Moreover, the sine of the quadrant is the sine of the right angle. Therefore the sine of side AB to the sine of $\angle AGB$, and the sine of side BG to the sine of $\angle BAG$, and also the sine of side AG to the sine of right $\angle ABG$ [all] have one and the same ratio. Q.E.D.

Theorem 17

In every nonright triangle the sines of the sides to the sines of the angles opposite those [sides] will have the same ratio.



What proof the preceding [theorem] indicated concerning right triangles, the present [theorem] states also concerning nonright triangles. Thus if ABG is a triangle having no right angle, then the sine of side AB to the sine of $\angle G$, and

†Fejl i kilde og oversættelse; der skal stå ZH.

the sine of side AB[‡] to the sine of $\angle B$, and the sine of side BG to the sine of angle [A, all] will have one and the same ratio.

From point A let perpendicular AD be dropped, falling upon arc BG if [AD] is found [to be] within the triangle, or meeting arc BG, necessarily extended, if [AD] falls outside the triangle. [AD] cannot coincide with either of the arcs AB and AG adjacent to it, for in that case one of the angles B and G would be a right [angle], which our hypothesis gives [to be] a nonright [angle].

Thus, first, let [it] fall within the triangle, determining two right triangles ABD and AGD. Then, by the preceding [theorem], with the terms changed around, the ratio of the sine of AB to the sine of AD is as that of the sine of right $\angle ADB$ to the sine of $\angle ABD$. Furthermore, by the same previous [theorem], the ratio of the sine of AD to the sine of AG is as that of the sine of $\angle AGD$ to the sine of right $\angle ADG$. And since the sine of $\angle ADG$ is the same [as the sine] of $\angle ADB$ because each of those [angles] is a right [angle], then, by indirect equal proportionality, the sine of AB to the sine of AG is as the sine of $\angle AGB$ to the sine of $\angle ABG$; and, by a rearrangement, the sine of side AB to the sine of $\angle AGB$ is as the sine of side AG to the sine of $\angle ABG$. Finally, you may infer the same ratio for the sine of side BG to the sine of $\angle BAG$ if first you would drop a perpendicular arc from one of the vertices B and G to the side opposite it.

Derefter gennemføres analog betragtning i tilfældet, hvor AD falder udenfor trekanten.

Thus the proof concerning right triangles and nonright [triangles], which was shown individually in these theorems, may at last be inferred concerning all triangles, no matter what kind they are. This fact will gradually bring fruits of much size and succulence for us to consider.

Tekst 18: Oluffssøn om regning på linier

De første regnebøger på dansk blev trykt i midten af 1500-tallet. Nedenfor er udgivet nogle udklip fra en regnebog af regnemesteren Anders Oluffssøn efter [Oluffssøn 1607]. Bogen udkom i 1560, men nedenstående er fra en udgave i 1607. Bogen forklarer både regning "på linier" (dvs. på regnebrættet) og "med cifre" (dvs. med de hindu-arabiske tal på papir), men udklippet nedenfor beskriver kun den første metode.

Det gamle danske forstås nok lettest ved at læse det højt som det står. Der kan dog gives følgende generelle regler (der dog ikke er universelt gyldige): brugen af bogstaverne v og u, og bogstaverne i og j er ofte ombyttet i forhold til nutidsdansk (som fx i *huor* og *ieg*). Sammenstillingerne 'ffu' og 'ff' betyder ofte 'v' (som fx i *offuer* og *gaffnlig*).

‡For AB read AG.

a) Læs teksten. Hvis det gamle danske volder store problemer kan det være en god idé at starte hvor Oluffssøn forklarer regnebrættets indretning og så vende tilbage til indledningen bagefter. Lav dit eget regnebræt ved hjælp af et stykke karton med streger og nogle mønter (fx 50-ører). Vis hvordan addition og subtraktion foregår på regnebrættet.

b) Regnebræt af samme type som den beskrevne i bogen blev også anvendt sammen med romertal. Overvej, hvordan man "oversætter" mellem romertal og konfigurationer på regnebrættet, fx DCCXXXVIII eller komprimeret DCCXXXIX.

c) Rekonstruer omregningsforholdet mellem Marck, Skilling og Penning som bruges i bogen.

d) Med hvilket formål har Oluffssøn skrevet regnebogen?

Anders Oluffssøn

En ny Konstig Regne Bog, vdi Tal Maader oc Vecter, paa Lynnerne och met Ziffre, baade vdi helt och brødit tall, met skiøne och nyttige Regle och konstige Exempler, og der til nogle Kiøbmandskaffs Taffler, hvilcken gantske nyttig oc gaffnlig er dennem som bruge Verdzslig handel oc Kiøbmandskaff.

Erlig/ Velbyrdig Mand/ oc Strenge Riddere/ Her Herloff Trolle[1] til Hillerødsholm/ Høybaarne Førstis Konning Friderichs/ vor Naadigste Herris Befalnings Mand offuer Sielandsstick/ sin gunstige Herre/ Ynsker ieg Anders Oluffssøn/ Naade oc Fred/ aff Gud vor HERRE Christos, Disligeste tilbiuder jeg/ min gantske ydmyge vilie oc redebonne Tienist/ nu oc altid.

Kjere Her Herloff/ gunstige oc gode Herre/ Huor mectig/ nyttig oc gaffnlig/ den Høyloffuede oc velbekynte *Arithmetica* Konst fornøden er/ kand mand her vdaff lætteligen kiende/ vide oc forstaa. Som den hellige Apostel til de Romere vdi det Første Capittel/[2] Taler merckelige om de vduaartis siunlige oc begribelige Vidnisbyrd/ der er vdi Himmelen/ Jorden/ oc den gantske Verden om Gud/ huor aff icke alleniste Christne/ men ocsaa Hedninge/ kunde lættelig kiende/ oc visselig vdaff sin egen Forstand offueruindis/ at denne Verden icke er bleffuen saadan aff sig selff/ eller haffuer værit aff Euighed/ Men at der maa jo vist være en Euig/ Vijs oc Almectig Gud/ som saadan drabelig oc vnderlig ting haffuer skabt. Dog

[1]Herluf Trolle (1516–65) var adelsmand, admiral og stiftslensmand for Sjælland. Det sidste betød, at han havde opsyn med kirker og skoler. Uddannelsesvæsenet havde hans store bevågenhed. Da hans ægteskab var barnløst blev godset Herlufsholm ved hans død overdraget til skole for "adelig og andre ærlige Mænds børn".

[2]I *Romerbrevet* 1, 20 står der:

> Thi hans [Guds] usynlige væsen, både hans evige kraft og hans guddommelighed, har kunnet ses fra verdens skabelse af, idet det [Guds væsen] forstås af hans gerninger så de [hedningerne] er uden undskyldning.

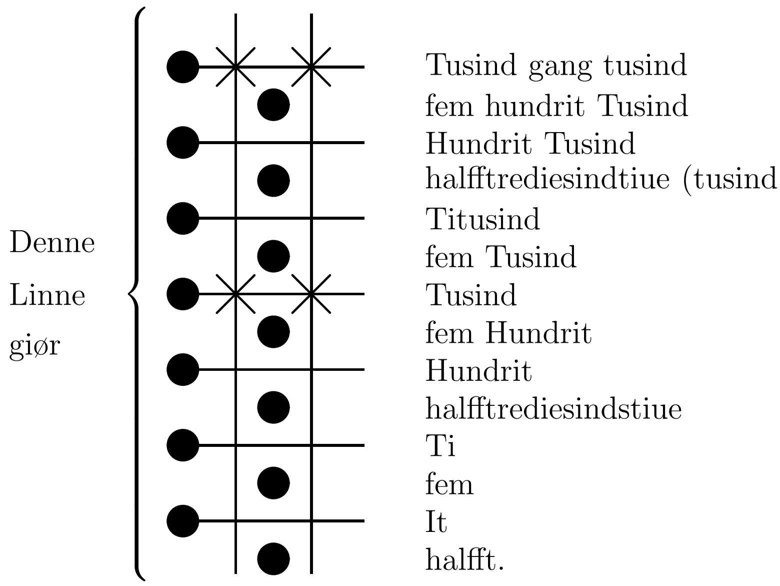
vdaff alle saadanne Vidnisbyrd/ som Gud haffuer effter ladit vdi Naturen om sig selff/ Er dette It vdaff de besynderligste/ At Gud haffuer vdi Menniskens Sind oc Forstand/ indplantet en ordentlig Vijsdom til at telle/ Oc ved Tallet begribe mange andre drabelige Tingest oc Konster/ som er/ At forfare Planeternis oc andre Stierners Gang oc Løb/ oc der vdaff kiende Guds vnderlige Gierninger her paa Jorden. Item / Tallet oc Regnekonst/ er en begyndelse til *Geometriam*, i huilcken mand lærer at maale Jorden/ vdaff huilcken Konst mand vist forfarer/ at Himmelen oc Jorden haffuer en ende/ oc icke er wendelig/ som mange wforstandige Mennisker meene/ oc vdaff saadan Begrandskelse/ see wi at wi ere her paa en Øe/ Oc haffuer vort rette Fæderne Land vdi Himmelen/ det wi skulde stunde effter. Saadan drabelig Nytte oc Gaffn haffuer wi aff Regne Konst/ eller *Arithmetica*, der som hun retteligen brugis/ Dog icke det allene/ men ocsaa at Land oc Riger kunde holdis ved Mact/ met Kiøb/ Sall oc anden Contract/ det som ingenlunde skee kunde/ vden Gud haffde begaffuit oss/ met den herlige Konst *Arithmetica*, Oc der som den vaare oss fratagen/ vaare der saare lidet skilmisse imellem Mennisken oc wfornuftige Creatur/ All Boglige Konster ødelagdis/ all Handel/ Kiøb/ Sall/ Laaen oc huad ieg vil mere sige/ end som den vijse Isodorus haffuer sagt: Tag Tallet fra alle ting saa leggis de øde.
[. . .]

Til Læseren.

Christne Læsere / Denne Regne Bog/ som ieg her haffuer mig faare tagit at vdgiøre/ oc forbedre met flere Regle/ oc synderlige Konst oc Exempler/ baade vdi heelt oc brudit Tal/ vdi alle slags Handel oc Haandtering/ end som wi her til dags paa vort Maal vdi Prent haffuer hafft/ Den haffuer ieg icke vdgiort eller ladit vdgaa/ for de Lærde oc Forfarne skyld vdi denne Konst/ Men for de vnge Børns/ Personers oc Disciplers skyld/ som vdi Regne Skoler/ eller anden steds/ lade sig vdi denne Regenskaffs Konst vnderuise oc lære/ paa det/ at de kunde hende haffue at lære/ oc øffue sig effter/ etc. Saa effterdi/ at ieg tit oc offte haffuer fornummit oc befundit vdi min Skole/ iblant mine Discipler/ groffue oc haardnemmede Børn oc Personer/ iblant de skarpsindige/ som icke vdaff faa oc lætte Exempler kunde vdi denne Konst oc alle Regle/ komme til Forstand eller bliffue forfarne. Haffuer ieg nu derfaare/ denne min Regne Bog/ vdi alle Regle/ met mange oc atskillige slags Exempler/ baade lætte ocsaa tunge/ vdi heelt oc brudit Tal forbedrit/ huilcke de kunde lære at øffue sig effter/ oc der vdaff komme til Forstand vdi alle Regle/ Handel oc Haandtering/ oc bliffue bequemme til Verdslig Handel oc Kiøbmandskaff.
[. . .]

Her effterfølger/ Huorledis mand skal forstaa linnerne/ oc Species.

Vdi denne effterfølgende Figur/ skalt du mercke/ At den første eller nederste linne bemercker It/ Den anden Ti/ Den tredie Hundret/ Den fierde Tusinde etc. oc saa frem at/ Oc huer rom for sig/ som er imellem huer i to Linner/ bemercker eller giør icke vden halffparten saa megit som denne Linne giør/ der næst offuen for er. Oc skalt du betegne huer fierde Linne met it Kaarss/ paa det at du kand vide/ at denne Linne/ som Kaarsset staar paa/ bemercker dig Tusinde/ oc bemercker det Kaarss lige saa meget/ som den Pricke giør/ som dig tilforne er lært/ at sætte offuer huer fierde Figur. Som denne effterfølgende Figur oc Taffle vduiser.



Her effterfølger at Addere oc sammen legge mange Tal vdi en Sum.

Additio.

Denne Species lærer dig at Summere/ oc sammen legge mange haande Tal i en sum.

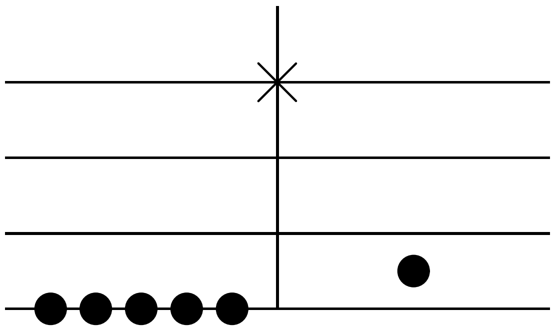
Den Første Regel.

Her skalt du mercke/ at du skalt giøre oc skiffte saa mange Rom paa Linnerne/ som der atskillige slags Mynt oc Penninge forhaanden til/ saa at huer slags Mynt/ kommer at ligge vdi deris besynderlig Rom. Daler for sig/ Marck for sig/ Skilling for sig oc Penninge for sig etc.

Men for alting skalt du mercke/ acte oc vide/ disse try stycker som her efterfølger.

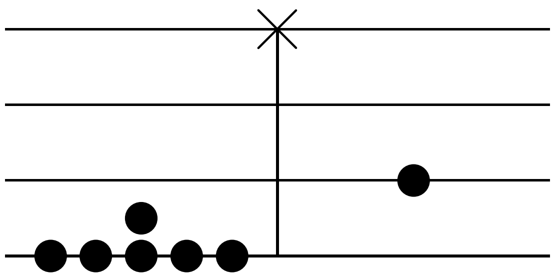
For det Første.

Nar fem Penninge kommer at ligge paa en Linne/ da skalt du tage dennem op/ oc legge en Penning i det rom/ som imellem næst offuenfaare er. Som disse effterfølgende Linner vduiser.



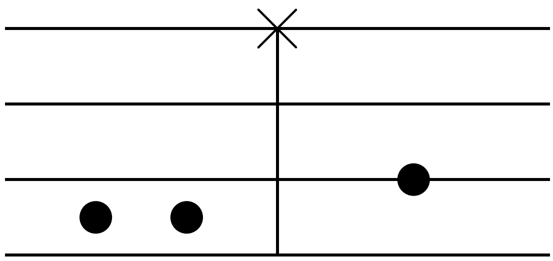
For det Andet.

Naar der ligger fem Penninge paa Linnen/ oc en Penning imellem i det rom næst offuen faare/ da tag de fem Penninge op/ som ligger paa Linnen/ oc den Penning som ligger imellem/ oc leg derfor en Penning/ paa den anden Linne næst offuen faare/ oc bemercker saa Ti/ thi fem Penninge paa Linnen/ oc den ene som mercker fem imellem Linnerne/ Giør Ti. Som du her seer.



For det Tredie.

Naar to Penninge kommer at ligge vdi it Rom imellem to Linner/ da tag samme to Penninge op/ oc leg derfaare en Penning paa den Linne der næst offuen faar er/ Som disse efterfølgende Linner vduiser.



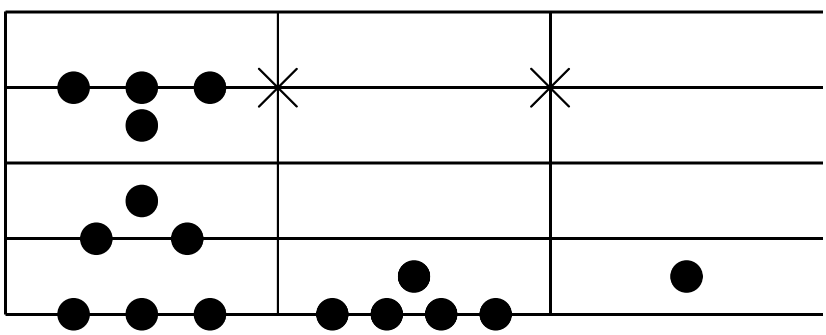
Exempel.

Item/ En Suend eller Tienere haffuer anammit paa sin Herris vegne/ disse efterfølgendis Penninge/ Nu vilde ieg gierne vide, huor megit samme efterfølgende Penninge beløber sig vdi en Sum.

1234		19		5	
345		18		8	
567		15		2	
789	Marck	13	Skilling	7	Penning
102		7		3	
200		10		6	
220		9		9	
110		11		1	
3567		102		41	
3573		9		5	

Leg nu først på Linnerne/ Marckene for sig/ dernæst Skillingene/ i lige maade Penningene for sig/ da faar du som det første Tal neden faare vduiser/ Giør nu de Penninge til Skillinge/ oc saa de Skillinge til Marck/ da faar du som det andet oc nederste Tal vduiser/ oc er den rette Sum/ Huilcken paa Linnerne ligger/ Som her effterfølger.

Første Regne Benck. Marck:	2. Regne Benck. Skil:	3. Regne Benck. Penning.



[...]

Subtractio.

Subtractio/ er den Tredie Species/ huilcken der lærer dig/ Huorledis du skalt affdrage eller afftage it tal eller Sum vdaff it andit.

Den Første Regel.

Til denne forscreffne Subtractionem/ hører tuende Tal/ det ene og det første Tal/ vd aff huilcket du vilt Subtrahere/ eller affdrage noget andet Tal (det samme leg paa Linnerne) Det Andet/ det Tal som skal Subtraheris oc affdragis (scriff det for dig) Tag saa det mindste Tal/ fra det som størst er/ eller lige aff lige (fordi det største kand icke tagis aff det mindste) oc huad da til offuers bliffuer/ kaldis Residuum eller Restant.

Den Anden Regel.

Men er det saa/ at du det ene Tal icke vdaff det andet kand affdrage/ da (Resoluere) det er/ vedsle den øffuerste Penning ned/ som ligger paa Linnen/ oc leg en Penning ned i det rom næst neden faare/ oc der til fem Penninge paa den Linne næst neden faare/ eller tag en Penning aff it rom/ oc leg fem Penninge paa den Linne næst neden faare/ Tag saa det forsatte Tal der fra.

Den Tredie Regel.

Er det saa/ at du haffuer Skillinge/ oc Penninge/ at tage fra/ oc de ere icke forhaanden/ saa at du kand dennem afftage/ da giør/ Daler/ Gyldene/ eller Marckene til Skillinge/ og Skillinger til Penninge/ Tag saa dit Tal der fra/ Saa seer du huad igen bliffuer.

Exempel.

Item/ En Kiøbmand er en anden Mand skyldig 2000. Marck/ der paa haffuer den anden betald/ som hannem skyldig er/ vdi huer Termin/ saa mange Marck/ Skilling oc Penninge/ Som her effterfølger. Nu vil ieg gierne vide/ huor megit hand endnu hannem vd aff rette plictig er/ etc.

105		12		7	
223		9		5	
37		15		8	
69	Marck	0	Skillinge	11	Penninge
157		13		0	
251		17		10	
842		66		41	
846		5		5	

Summere tilsammen/ huad som hand hannem paa Regenskaff betalet haffuer/ kommer som her næst offuen faare staar/ som er: 846. Marck/ 5. Skillinge/ 5. Penninge/ Leg nu op paa Linnerne din Hoffuit Sum/ som er: 2000. Marck/ oc tag forscreffne vdlagde oc betalde Penninge der fra/ da bliffuer igen liggendis/ 1153. $\mathcal{M}$/ 10. $\mathcal{S}$/ 7. $\mathcal{P}$. Som hand hannem endnu skyldig er at betale/ etc.

Proba

Vilt du Probere/ eller forsøge det/ om du haffuer giort det ret eller ey/ da giør som her effterfølger.

Leg det afftagne Tal/ til det som paa Linnerne ligger/ kommer da det første oplagde Tal igien/ da haffuer du ret.

Tekst 19: Pascal om hasardspil

Flere italienske matematikere havde før 1600 diskuteret problemet om, hvordan man skal dele puljen mellem to hasardspillere, som bliver afbrudt i deres spil. Formentlig i 1654 fremlagde Chevalier de Méré, der selv var ivrig spiller, problemet for Pascal og Fermat. Problemet — nedenfor kaldet *the problem of the points* og på dansk som regel kaldet delingsproblemet — går ud på følgende: To personer spiller et lige spil, fx "plat og krone". Den der først vinder et på forhånd aftalt antal spil, n, vinder puljen. Spillerne bliver imidlertid afbrudt før spillet er færdig. Hvordan skal de så dele puljen?

Pascal fremsatte sit forslag til en løsning på problemet i et brev til Fermat fra 1654. Nedenfor er gengivet den engelske oversættelse i [Smith 1959, pp. 547–49]. Puljen er her på 64 *pistoles* (en fransk møntenhed fra 1600-tallet).

a) Gennemgå Pascals løsning.

b) Brevvekslingen mellem Fermat og Pascal om hasardspil angives undertiden som begyndelsen til sandsynlighedsregningen. Hvad siger Pascal om sandsynligheder i brevet? Hvad er det centrale begreb hos Pascal?

c) I brevet omtaler Pascal også et andet problem: *the problem of the dice.* Her holder en person på, at han kan få et bestemt antal øjne med to terninger i løbet af et bestemt antal kast.

   Hvor mange gange skal man kaste, før man med fordel kan holde på, at man slår mindst én dobbelt sekser?

Pascal to Fermat
Wednesday, July 29, 1654

Monsieur,—

1. Impatience has seized me as well as it has you, and although I am still abed, I cannot refrain from telling you that I received your letter in regard to the problem of the points[1] yesterday evening from the hands of M. Carcavi, and that I admire it more than I can tell you. I do not have the leisure to write at length, but, in a word, you have found the two divisions of the points and of the dice with perfect justice. I am thoroughly satisfied as I can no longer doubt that I was wrong, seeing the admirable accord in which I find myself with you.

I admire your method for the problem of the points even more than that of the dice. I have seen solutions of the problem of the dice by several persons, as M. le chevalier de Méré, who proposed the question to me, and by M. Roberval

[1] The editors of the letter notes that the word *parti* means the division of the stake between the players in the case when the game is abandoned before its completion. *Parti des dés* means that the man who holds the die agrees to throw a certain number in a given number of trials. For clarity, in this translation, the first of these cases will be called the problem of the points, a term which has had a certain acceptance in the histories of mathematics, while the second may by analogy be called the problem of the dice.

also. M. de Méré has never been able to find the just value of the problem of the points nor has he been able to find a method of deriving it, so that I found myself the only one who knew this proportion.

2. Your method is very sound and it is the first one that came to my mind in these researches, but because the trouble of these combinations was excessive, I found an abridgment and indeed another method that is much shorter and more neat, which I should like to tell you here in a few words; for I should like to open my heart to you henceforth if I may, so great is the pleasure I have had in our agreement. I plainly see that the truth is the same at Toulouse and at Paris.

This is the way I go about it to know the value of each of the shares when two gamblers play, for example, in three throws, and when each has put 32 pistoles at stake:

Let us suppose that the first of them has *two* (points) and the other *one*. They now play one throw of which the chances are such that if the first wins, he will win the entire wager that is at stake, that is to say 64 pistoles. If the other wins, they will be *two* to *two* and in consequence, if they wish to separate, it follows that each will take back his wager that is to say 32 pistoles.

Consider then, Monsieur, that if the first wins, 64 will belong to him. If he loses, 32 will belong to him. Then if they do not wish to play this point, and separate without doing it, the first should say "I am sure of 32 pistoles, for even a loss gives them to me. As for the 32 others, perhaps I will have them and perhaps you will have them, the risk is equal. Therefore let us divide the 32 pistoles in half, and give me the 32 of which I am certain besides." He will then have 48 pistoles and the other will have 16.

Now let us suppose that the first has *two* points and the other *none*, and that they are beginning to play for a point. The chances are such that if the first wins, he will win all of the wager, 64 pistoles. If the other wins, behold they have come back to the preceding case in which the first has *two* points and the other *one*.

But we have already shown that in this case 48 pistoles will belong to the one who has *two* points. Therefore if they do not wish to play this point, he should say, "If I win, I shall gain all, that is 64. If I lose, 48 will legitimately belong to me. Therefore give me the 48 that are certain to be mine, even if I lose, and let us divide the other 16 in half because there is as much chance that you will gain them as that I will." Thus he will have 48 and 8, which is 56 pistoles.

Let us now suppose that the first has but *one* point and the other *none*. You see, Monsieur, that if they begin a new throw, the chances are such that if the first wins, he will have *two* points to *none*, and dividing by the preceding case, 56 will belong to him. If he loses, they will be point for point, and 32 pistoles will belong to him. He should therefore say, "If you do not wish to play, give me the 32 pistoles of which I am certain, and let us divide the rest of the 56 in half. From 56 take 32, and 24 remains. The divide 24 in half, you take 12 and I take 12 which with the 32 will make 44.

Tekst 20: Descartes om regning med liniestykker

Indledningen til Descartes' *La geométrie* er gengivet nedenfor i dansk oversættelse efter [Wolff 1967, pp. 90–92], dog således at fodnoter og figuren med den tilsvarende side fra den franske original er fra [Smith & Latham 1954, pp. 1–6].

Descartes forklarer her, hvordan man geometrisk med liniestykker kan udføre operationer svarende til de aritmetiske operationer $+$, $-$, $\cdot$, $/$ og $\sqrt{\ }$.

a) Gennemgå de fem geometriske operationer på liniestykker, der svarer til de fem aritmetiske operationer $+$, $-$, $\cdot$, $/$ og $\sqrt{\ }$.

b) Sammenlign den geometriske operation Descartes angiver som svarende til multiplikation med den geometriske operation, som grækerne anvendte.

c) Sammenlign Descartes' operationer med den græske geometriske algebra. Hos Descartes er der særlig én størrelse, der får hans idé til at fungere og som ikke fandtes i den geometriske algebra, hvilken?

d) Hvad handler *La geométrie* ifølge indledningen om?

Bog I

Problemer, til hvis konstruktion der kun kræves rette linier og cirkler.

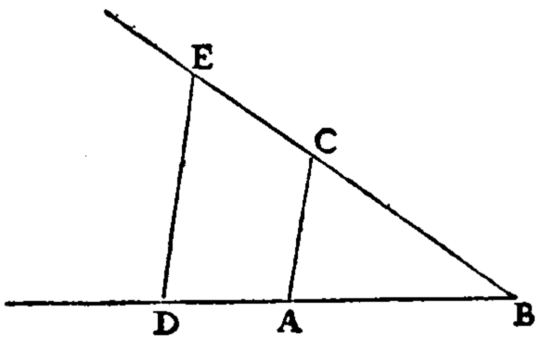
Ethvert geometrisk problem kan let reduceres til en sådan form, at et kendskab til længderne af visse rette linier er tilstrækkeligt for dets konstruktion. Ligesom aritmetikken kun består af fire eller fem operationer, nemlig addition, subtraktion, multiplikation, division og roduddragning, der kan betragtes som en slags division, således behøver man i geometrien for at finde visse forlangte linier blot at addere eller subtrahere andre linier; eller idet der er valgt en linie, som jeg — for at knytte så nær en forbindelse til tallene som muligt — vil kalde for enheden, og som i reglen kan vælges vilkårligt, og idet der er givet to andre linier, at finde en fjerde linie, der forholder sig til den ene af de givne linier som den anden til enheden (hvilket er det samme som multiplikation); eller at finde en fjerde linie, der forholder sig til den ene af de givne linier som enheden til den anden (hvilket er det samme som division); eller endelig at finde en, to eller flere mellemproportionaler mellem enheden og en anden linie (hvilket er det samme som at uddrage kvadratroden, kubikroden etc. af den givne linie).[1] Og jeg skal, for klarheds skyld, ikke tøve med indførelsen af disse aritmetiske begreber i geometrien.

Lad for eksempel AB være valgt som enhed, og lad det være forlangt, at BD skal multipliceres med BC. Jeg skal så blot forbinde punkterne A og C og tegne DE parallel med CA; BE er da produktet af BD og BC.

[1] While in arithmetic the only exact roots obtainable are those of perfect powers, in geometry a length can be found which will represent exactly the square root of a given line, even though this line be not commensurable with unity. Of other roots, Descartes speaks later.

eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

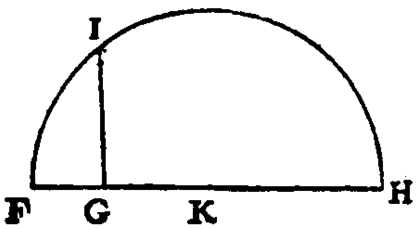


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diviſion.

Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commẽt on peut

Mais ſouuent on n'a pas beſoin de tracer ainſi ces lignes

Kræves det, at BE skal divideres med BD, forbinder jeg E og D og tegner AC parallel med DE; BC er da divisionens resultat.

Ønskes kvadratroden af GH, tilføjer jeg i forlængelse af den samme rette linie FG lig med enheden; idet FH halveres i K, tegner jeg dernæst cirklen FIH med K som centrum og oprejser den vinkelrette i G, som jeg forlænger til I, og GI er den ønskede rod. Kubikrødder eller andre rødder skal jeg ikke omtale her, da jeg senere mere belejligt vil komme ind derpå.

Ofte er det ikke nødvendigt at tegne linierne på papiret, idet det vil være tilstrækkeligt, at de hver for sig betegnes med et enkelt bogstav. Skal jeg således addere linierne BD og GH, kalder jeg den ene a og den anden b og skriver $a+b$; $a-b$ skal da betyde, at b trækkes fra a; ab, at a multipliceres med b; a/b, at a divideres med b; aa eller a^2, at a multipliceres med sig selv, a^3, at dette resultat multipliceres med a, og så videre i det uendelige.[2] Ønsker jeg at uddrage kvadratroden af a^2+b^2, skriver jeg $\sqrt{a^2+b^2}$; skulle jeg ønske at uddrage kubikroden af $a^3-b^3+ab^2$, skriver jeg $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$, og tilsvarende for andre rødder.[3] Det må bemærkes, at jeg med a^2, b^3 og lignende udtryk sædvanligvis mener simple linier, som jeg imidlertid benævner kvadrater, kuber osv. for på denne måde at kunne gøre brug af de inden for algebraen benyttede udtryk.[4]

Det skal endvidere bemærkes, at alle led i udtrykket for en enkelt linie altid bør udtrykkes i det samme antal dimensioner, forudsat at enheden ikke er fastlagt i problemets betingelser. Således indeholder a^3 lige så mange dimensioner som ab^2 eller b^3, og dette er de enkelte komponenter i den linie, jeg benævnte ved udtrykket $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}$. Det forholder sig imidlertid ikke på samme måde i det tilfælde, at enheden er fastlagt; thi enheden kan altid underforstås, hvor der er for mange eller for få dimensioner; skal vi således uddrage kubikroden af a^2b^2-b, må vi betragte størrelsen a^2b^2 som divideret en gang med enheden og størrelsen b som multipliceret to gange med enheden.

Tekst 21: Descartes om Pappus' problem

Kurver og tilhørende ligninger indføres i Descartes' *La geométrie* i forbindelse med behandlingen af det såkaldte Pappus' problem, der er beskrevet i Bog I af værket.

Nedenfor er gengivet Descartes' diskussion efter den engelske oversættelse i [Smith & Latham 1954, pp. 22–37]. Nogle af fodnoterne er dog udeladt.

[2]Descartes uses a^3, a^4, a^5, a^6, and so on, to represent the respective powers of a, but he uses both aa and a^2 without distinction. For example, he often has $aabb$, but he also uses $3a^2/4b^2$.

[3]Descartes writes: $\sqrt{\text{C.}a^3-b^3+abb}$. See original, page 299, line 9.

[4]At the time this was written, a^2 was commonly considered to mean the surface of a square whose side is a, and b^3 to mean the volume of a cube whose side is b; while b^4, b^5, ... were unintelligible as geometric forms. Descartes here says that a^2 does not have this meaning, but means the line obtained by constructing a third proportional to 1 and a, and so on.

a) Læs formuleringen af Pappus' problem i de første par afsnit, og giv en formulering med moderne symbolik.

Der er givet et antal linier $l_1, l_2, \ldots, l_n$ i planen, og afstandene fra et vilkårligt punkt C til linierne (målt langs liniestykker, der danner faste vinkler til de givne linier) kaldes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Hvis $n = 3$ søges de punkter C, hvor $x_1 x_2 / x_3^2$ er en konstant. Formulér på lignende måde Pappus' problem for $n = 4, 5, 6, 7$ og 8.

b) Nu betragtes et konkret eksempel på tilfældet $n = 3$ ved brug af et koordinatsystem. Antag linien l_1 er givet ved ligningen $x = a$, linien l_2 er givet ved ligningen $x = -a$ og ligningen l_3 er y-aksen, samt at afstande til linierne måles vinkelret. Tegn de tre linier i et koordinatsystem og find ligningen, der udtrykker Pappus' problem i dette tilfælde. Hvilken kurve bliver løsningen?

c) Som nævnt løste Apollonius problemet for $n = 3$ og $n = 4$. Pappus diskuterede problemet for $n > 4$. Hvilket problem kunne opstå for Pappus ved formulering af problemet for $n > 6$?

d) Gennemgå Descartes' løsning.

e) Hvad mener Descartes med, at han kan konstruere de ønskede kurver med passer og lineal? (svaret findes til sidst i teksten).

f) Hvordan kan Descartes have argumenteret for, at det geometriske sted for seks, syv, otte eller ni linier kan konstrueres ved hjælp af keglesnit?

g) Hvilken inddeling af konstruktionsproblemer er antydet? Descartes er mere explicit med en inddeling andre steder.

h) Sammenlign Descartes' "koordinater" med vores *cartesiske* koordinater, som er opkaldt efter ham.

René Descartes

Book I

Problems the Construction of Which Requires Only Straight Lines and Circles

[...]

The question, then, the solution of which was begun by Euclid and carried farther by Apollonius, but was completed by no one, is this:

Having three, four or more lines given in position, it is first required to find a point from which as many other lines may be drawn, each making a given angle with one of the given lines, so that the rectangle of two of the lines so drawn shall bear a given ratio to the square of the third (if there be only three); or to the rectangle of the other two (if there be four), or again, that the parallelepiped[1] constructed upon three shall bear a given ratio to that upon the other two and any given line (if there be five), or to the parallelepiped upon the other three (if there be six); or (if there be seven) that the product obtained by multiplying four of them together shall bear a given ratio to the product of the other three, or (if there be eight) that the product of four of them shall bear a given ratio to the product of the other four. Thus the question admits of extension to any number of lines.

Then, since there is always an infinite number of different points satisfying these requirements, it is also required to discover and trace the curve containing all such points.[2] Pappus says that when there are only three or four lines given, this line is one of the three conic sections, but he does not undertake to determine, describe, or explain the nature of the line required when the question involves a greater number of lines. He only adds that the ancients recognized one of them which they had shown to be useful, and which seemed the simplest, and yet was not the most important. This led me to try to find out whether, by my own method, I could go as far as they had gone.[3]

First, I discovered that if the question be proposed for only three, four, or five lines, the required points can be found by elementary geometry, that is, by the use of the ruler and compasses only, and the application of those principles that I have already explained, except in the case of five parallel lines. In this case, and in the cases where there are six, seven, eight, or nine given lines, the required points can always be found by means of the geometry of solid loci,[4] that is, by using some one of the three conic sections. Here, again, there is an exception in the case of nine parallel lines. For this and the cases of ten, eleven, twelve, or thirteen given lines, the required points may be found by means of a curve of degree next higher than that of the conic sections. Again, the case of thirteen parallel lines must be excluded, for which, as well as for the cases of fourteen, fifteen, sixteen, and seventeen lines, a curve of degree next higher than the preceding must be used; and so on indefinitely.

Next, I have found that when only three or four lines are given, the required points lie not only all on one of the conic sections but sometimes on the circumference of a circle or even on a straight line.[5]

When there are five, six, seven, or eight lines, the required points lie on a curve of degree next higher than the conic sections, and it is impossible to imagine such a curve that may not satisfy the conditions of the problem; but the required

[1] That is, continued product.

[2] It is here that the essential feature of the work of Descartes may be said to begin.

[3] Descartes gives here a brief summary of his solution, which he amplifies later.

[4] This term was commonly applied by mathematicians of the seventeenth century to the three conic sections, while the straight line and circle were called plane loci, and other curves linear loci. See Fermat, *Isagoge ad Locos Planos et Solidos*, Toulouse, 1679.

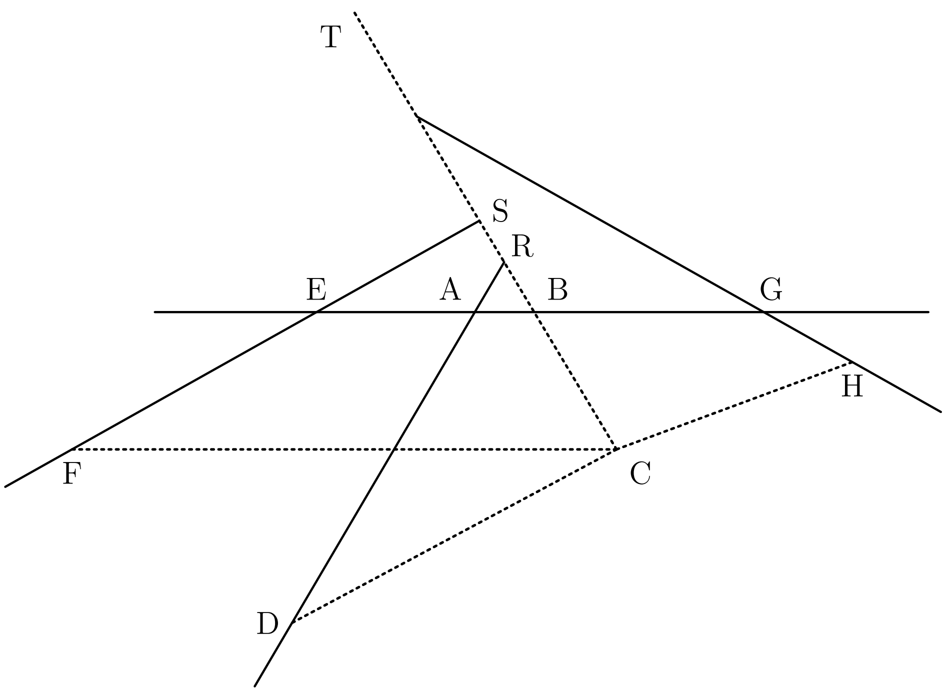
[5] Degenerate or limiting forms of the conic sections.

points may possibly lie on a conic section, a circle, or a straight line. If there are nine, ten, eleven, or twelve lines, the required curve is only one degree higher than the preceding, but any such curve may meet the requirements, and so on to infinity.

Finally, the first and simplest curve after the conic sections is the one generated by the intersection of a parabola with a straight line in a way to be described presently.

I believe that I have in this way completely accomplished what Pappus tells us the ancients sought to do, and I will try to give the demonstration in a few words, for I am already wearied by so much writing.

Let AB, AD, EF, GH, ... be any number of straight lines given in position,[6] and let it be required to find a point C, from which straight lines CB, CD, CF, CH,... can be drawn, making given angles CBA, CDA, CFE, CHG,... respectively, with the given lines, and such that the product of certain of them is equal to the product of the rest, or at least such that these two products shall have a given ratio, for this condition does not make the problem any more difficult.



First, I suppose the thing done, and since so many lines are confusing, I may simplify matters by considering one of the given lines and one of those to be drawn (as, for example, AB and BC) as the principal lines, to which I shall try to refer all the others. Call the segment of the line AB between A and B, x, and

[6]It should be noted that these lines are given in position but not in length. They thus become lines of reference or coördinate axes, and accordingly they play a very important part in the development of analytic geometry. [...]

call BC, y. Produce all the other given lines to meet these two (also produced if necessary) provided none is parallel to either of the principal lines. Thus, in the figure, the given lines cut AB in the points A, E, G, and cut BC in the points R, S, T.

Now, since all the angles of the triangle ARB are known,[7] the ratio between the sides AB and BR is known.[8] If we let AB : BR $= z : b$, since AB $= x$, we have RB $= \frac{bx}{z}$; and since B lies between C and R,[9] we have CR $= y + \frac{bx}{z}$. (When R lies between C and B, CR is equal to $y - \frac{bx}{z}$, and when C lies between B and R, CR is equal to $-y + \frac{bx}{z}$). Again, the three angles of the triangle DRC are known,[10] and therefore the ratio between the sides CR and CD is determined. Calling this ratio $z : c$, since CR $= y + \frac{bx}{z}$, we have CD $= \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{z^2}$. Then, since the lines AB, AD, and EF are given in position, the distance from A to E is known. If we call this distance k, then EB $= k + x$; although EB $= k - x$ when B lies between E and A, and E $= -k + x$ when E lies between A and B. Now the angles of the triangle ESB being given, the ratio of BE to BS is known. We may call this ratio $z : d$. Then BS $= \frac{dk+dx}{z}$ and CS $= \frac{zy+dk+dx}{z}$.[11] When S lies between B and C we have CS $= \frac{zy-dk-dx}{z}$, and when C lies between B and S we have CS $= \frac{-zy+dk+dx}{z}$. The angles of the triangle FSC are known, and hence, also the ratio of CS to CF, or $z : e$. Therefore, CF $= \frac{ezy+dek+dex}{z^2}$. Likewise, AG or l is given, and BG $= l - x$. Also, in triangle BGT, the ratio of BG to BT, or $z : f$, is known. Therefore, BT $= \frac{fl-fx}{z}$ and CT $= \frac{zy+fl-fx}{z}$. In triangle TCH, the ratio of TC to CH, or $z : g$, is known,[12] whence CH $= \frac{gzy+fgl-fgx}{z^2}$.

And thus you see that, no matter how many lines are given in position, the length of any such line through C making given angles with these lines can always be expressed by three terms, one of which consists of the unknown quantity y multiplied or divided by some known quantity; another consisting of the unknown quantity x multiplied or divided by some other known quantity; and the third consisting of a known quantity.[13] An exception must be made in the case where the given lines are parallel either to AB (when the term containing x vanishes), or to CB (when the term containing y vanishes). This case is too simple to require further explanation. The signs of the terms may be either $+$ or $-$ in every conceivable combination.[14]

You also see that in the product of any number of these lines the degree of any term containing x or y will not be greater than the number of lines (expressed

[7] Since BC cuts AB and AD under given angles. Dette er forkert, idet der burde stå: "since BC and AD cuts AB under given angles.

[8] Since the ratio of the sines of the opposite angles is known.

[9] In this particular figure, of course.

[10] Since CB and CD cut AD under given angles.

[11] We have: CS $= y + \text{BS} = y + \frac{dk+dx}{z} = \frac{zy+dk+dx}{z}$, and similarly for the other cases considered below.

[12] It should be noted that each ratio assumed has z as antecedent.

[13] That is, an expression of the form $ax + by + c$, where a, b, c are any real positive or negative quantitites, integral or fractional (not zero, since this exception is considered later).

[14] Depending, of course, upon the relative positions of the given lines.

by means of x and y) whose product is found. Thus, no term will be of degree higher than the second if two lines be multiplied together, nor of degree higher than the third, if there be three lines, and so on to infinity.

Furthermore, to determine the point C, but one condition is needed, namely, that the product of a certain number of lines shall be equal to, or (what is quite as simple), shall bear a given ratio to the product of certain other lines. Since this condition can be expressed by a single equation in two unknown quantities, we may give any value we please to either x or y and find the value of the other from this equation. It is obvious that when not more than five lines are given, the quantity x, which is not used to express the first of the lines can never be of degree higher than the second.[15]

Assigning a value to y, we have $x^2 = \pm ax \pm b^2$, and therefore x can be found with ruler and compasses, by a method already explained. If then we should take successively an infinite number of different values for the line y, we should obtain an infinite number of values for the line x, and therefore an infinity of different points, such as C, by means of which the required curve could be drawn.

This method can be used when the problem concerns six or more lines, if some of them are parallel to either AB or BC, in which case either x or y will be of only the second degree in the equation, so that the point C can be found with ruler and compasses.

On the other hand, if the given lines are all parallel even though a question should be proposed involving only five lines, the point C cannot be found in this way. For, since the quantity x does not occur at all in the equation, it is no longer allowable to give a known value to y. It is then necessary to find the value of y.[16] And since the term in y will now be of the third degree, its value can be found only by finding the root of a cubic equation, which cannot in general be done without the use of one of the conic sections.

And furthermore, if not more than nine lines are given, not all of them being parallel, the equation can always be so expressed as to be of degree not higher than the fourth. Such equations can always be solved by means of the conic sections in a way that I shall presently explain.

Tekst 22: Wallis om imaginære tal

I *Treatise of Algebra, Both Historical and Practical, Showing the Original, Progress, and Advancement Thereof, From Time to Time; and by What Steps It Hath Attained to the Height at Which Now It Is* (London 1685) forsøgte John Wallis bl.a. at give en geometrisk fortolkning af de imaginære (dvs. komplekse) tal. Nedenfor er gengivet

[15] Since the product of three lines bears a given ratio to the product of two others and a given line, no term can be of higher degree than the third, and therefore, than the second in x.

[16] That is, to solve the equation for y.

udklip fra dette værk efter [Smith 1959, pp. 46–54].

a) Hvordan fortolker Wallis imaginære tal algebraisk?

b) Hvilken geometrisk fortolkning giver Wallis imaginære udtryk?

Chap. LXVI
Of Negative Squares, *and their* Imaginary Roots *in Algebra.*

We have before had occasion (in the Solution of some Quadratick and Cubick Equations) to make mention of Negative Squares, and Imaginary Roots, (as contradistinguished to what they call Real Roots, whether Affirmative or Negative:) But referred the fuller consideration of them to this place.

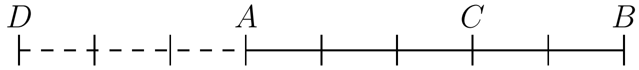
These *Imaginary* Quantities (as they are commonly called) arising from the *Supposed* Root of a Negative Square, (when they happen,) are reputed to imply that the Case propose is Impossible.

And so indeed it is, as to the first and strict notion of what is proposed. For it is not possible, that any Number (Negative or Affirmative) Multiplied into itself, can produce (for instance) -4. Since that Like Signs (whether $+$ or $-$) will produce $+$; and therefore not -4.

But it is also Impossible, that any Quantity (though not a Supposed Square) can be *Negative*. Since that it is not possible that any *Magnitude* can be *Less than Nothing*, or any *Number Fewer than None.*

Yet is not that Supposition (of Negative Quantities,) either Unuseful or Absurd; when rightly understood. And though, as to the bare Algebraick Notation, it import a Quantity less than nothing: Yet, when it comes to a Physical Application, it denotes as Real a Quantity as if the Sign were $+$; but to be interpreted in a contrary sense.

As for instance: Supposing a man to have advanced or moved forward, (from A to B,) 5 Yards; and then to retreat (from B to C) 2 Yards: If it be asked, how much he had Advanced (upon the whole march) when at C? or how many Yards he is now Forwarder than when he was at A? I find (by Subducting 2 from 5,) that he is Advanced 3 Yards. (Because $+5 - 2 = +3$.)



But if, having Advanced 5 Yards to B, he thence Retreat 8 Yards to D; and it be then asked, How much he is Advanced when at D, or how much Forwarder than when he was at A: I say -3 Yards. (Because $+5 - 8 = -3$.) That is to say, he is advanced 3 Yards less than nothing. [...]

And thus to say, he is *Advanced* -3 Yards; is but what we should say (in ordinary form of Speech), he is *Retreated* 3 Yards; or he wants 3 Yards of being so Forward as he was at A. [...]

Now what is admitted in Lines, must on the same Reason, be allowed in Plains also.

As for instance: Supposing that in one Place, we Gain from the Sea, 30 Acres, but Lose in another Place, 20 Acres: If it be now asked, How many Acres we have gained upon the whole: The Answer is, 10 Acres, or $+10$. (Because of $30 - 20 = 10$.) Or, which is all one 1600 Square Perches. (For the *English* Acre being Equal to a Plain of 40 Perches in length, and 4 in breadth, whose Area is 160: 10 Acres will be 1600 Square Perches.) Which if it lye in a Square Form, the Side of that Square will be 40 Perches in length; or (admitting of a Negative Root,) -40.

But if then in a Third place, we lose 20 Acres more; and the same Question be again asked, How much we have gained in the whole; the Answer must be -10 Acres. (Because $30 - 20 - 20 = -10$.) That is to say, The Gain is 10 Acres less than nothing. Which is the same as to say, there is a Loss of 10 Acres: or of 1600 Square Perches.

And hitherto, there is no new Difficulty arising, nor any other Impossibility than what we met with before, (in supposing a Negative Quantity, or somewhat Less than nothing:) Save only that $\surd 1600$ is ambiguous; and may be $+40$, or -40. And from such Ambiguity it is, that Quadratick Equations admit of Two Roots.

But now (supposing this Negative Plain, -1600 Perches, to be in the form of a Square;) must not this Supposed Square be supposed to have a Side? And if so, What shall this Side be?

We cannot say it is 40, nor that it is -40. (Because either of these Multiplyed into itself, will make $+1600$; not -1600).

But thus rather, that it is $\surd -1600$, (the Supposed Root of a Negative Square;) or (which is Equivalent thereunto) $10\surd -16$, or $20\surd -4$, or $40\surd -1$.

Where $\surd$ implies a Mean Proportional between a Positive and a Negative Quantity. For like as $\surd bc$ signifies a Mean Proportional between $+b$ and $+c$; or between $-b$, and $-c$; (either of which, by Multiplication, makes $+bc$:) So doth $\surd -bc$ signify a Mean Proportional between $+b$ and $-c$, or between $-b$ and $+c$; either of which being Multiplied, makes $-bc$. And this as to Algebraick consideration, is the true notion of such Imaginary Root, $\surd -bc$.

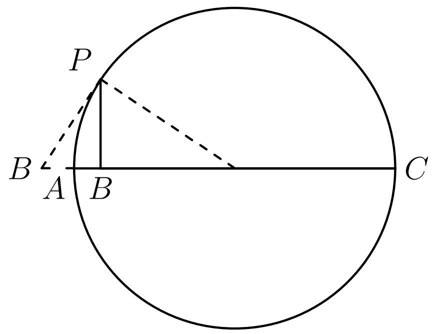
Chap. LXVII.
The same Exemplified in Geometry.

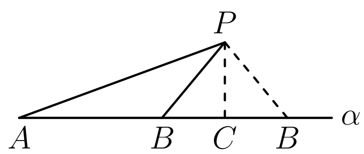
What hath been already said of $\surd -bc$ in Algebra, (as a Mean Proportional between a Positive and a Negative Quantity:) may be thus Exemplified in Geometry.

If (for instance,) Forward from A, I take AB $= +b$; and Forward from thence, BC $= +c$; (making AC $= +$AB $+$ BC $= +b + c$, the Diameter of a Circle:) Then is the Sine, or Mean Proportional BP $= \sqrt{}+bc$.

But if Backward from A, I take AB $= -b$; and then Forward from that B, BC $= +c$; (making AC $= -$AB $+$ BC $= -b + c$, the Diamter of the Circle:) Then is the Tangent or Mean Proportional BP $= \sqrt{}-bc$.

So that where $\sqrt{}+bc$ signifies a Sine; $\sqrt{}-bc$ shall signify a Tangent, to the same Arch (of the same Circle,) AP, from the same Point P, to the same Diameter AC.





Suppose now (for further Illustration,) A Triangle standing on the Line AC (of indefinite length;) whose one Leg AP $= 20$ is given; together with (the Angle PAB, and consequently) the Height PC $= 12$; and the length of the other Leg PB $= 15$: By which we are to find the length of the Base AB.

'Tis manifest that the Square of AP being 400; and of PC, 144; their Difference 256 ($= 400 - 144$) is the Square of AC.

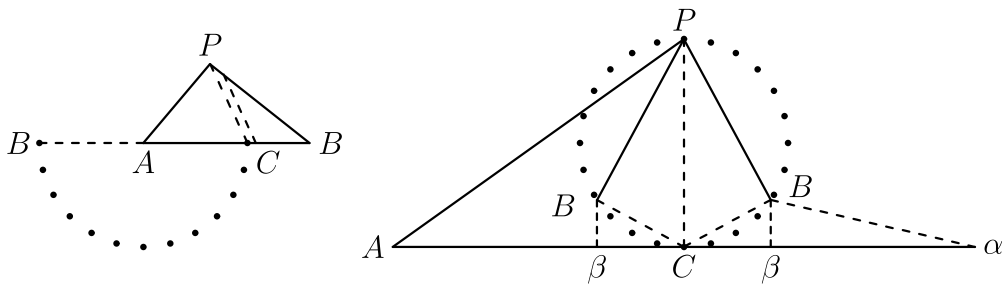
And therefore AC ($= \sqrt{}256$) $= +16$, or -16; Forward or Backward according as we please to take the Affirmative or Negative Root. But we will here take the Affirmative.

Then, because the Square of PB is 225; and of PC, 144; their Difference 81, is the Square of CB. And therefore CB $= \sqrt{}81$; which is indifferently, $+9$ or -9; and may therefore be taken Forward or Backward from C. Which gives a Double value for the length of AB; to wit, AB $= 16 + 9 = 25$, or AB $= 16 - 9 = 7$. Both Affirmative. (But if we should take, Backward from A, AC $= -16$; AB $= -16 + 9 = -7$, and AB $= -16 - 9 = -25$. Both Negative.)

Suppose again, AP $= 15$, PC $= 12$, (and therefore AC $= \sqrt{}: 225 - 144 : = \sqrt{}81 = 9$,) PB $= 20$ (and therefore BC $= \sqrt{}: 400 - 144 : = \sqrt{}256 = +16$, or -16:) Then is AB $= 9 + 16 = 25$, or AB $= 9 - 16 = -7$. The one Affirmative, the other Negative. (The same values would be, but with contrary Signs, if we take AC $= \sqrt{}81 = -9$: That is, AB $= -9 + 16 = +7$, AB $= -9 - 16 = -25$.)

In all cases, the Point B is found, (if not Forward, at least Backward,) in the Line AC, as the Question supposeth.

And of this nature, are those Quadratick Equations, whose Roots are Real, (whether Affirmative or Negative, or partly the one, partly the other;) without any other Impossibility than (what is incident also to Lateral Equations,) that the Roots (one or both) may be Negative Quantities.



But if we shall Suppose, AP $= 20$, PB $= 12$, PC $= 15$, (and therefore AC $= \surd 175$:) When we come to Subtract as before, the Square of PC (225,) out of the Square PB (144,) to find the Square of BC, we find that cannot be done without a Negative Remainder, $144 - 225 = -81$.

So that the Square of BC is (indeed) the Difference of the Squares of PB, PC; but a defective Deference; (that of PC proving the greater, which was supposed the Lesser; and the Triangle PBC, Rectangled, not as was supposed at C, but at B:) And therefore BC $= \surd{-81}$.

Which gives indeed (as before) a double value of AB, $\surd 175, +\surd{-81}$, and $\surd 175, -\surd{-81}$: But such as requires a new Impossibility in Algebra, (which in Lateral Equations doth not happen;) not that of a Negative Root, or a Quantity less than nothing; (as before,) but the Root of a Negative Square. Which in strictness of speech, cannot be: since that no Real Root (Affirmative or Negative,) being Multiplied into itself, will make a Negative Square.

This Impossibility in *Algebra*, argues an Impossibility of the case proposed in Geometry; and that the Point B cannot be had, (as was supposed,) in the Line AC, however produced (forward or backward,) from A.

Yet are there Two Points designed (out of that Line, but) in the same Plain; to either of which, if we draw the Lines AB, BP, we have a Triangle; whose Sides AP, PB, are such as were required: And the Angle PAC, and Altitude PC, (above AC, though not above AB,) such as was proposed; And the Difference of Squares of PB, PC, is that of CB.

And like as in the first case, the Two values of AB (which are both Affirmative,) make the double of AC, $(16 + 9, +16 - 9, = 16 + 16 = 32$:) So here, $\surd 175 + \surd{-81}, +\surd 175 - \surd{-81}, = 2\surd 175$.

And (in the Figure,) though not the Two Lines themselves, AB, AB, (as in the First case, where they lay in the Line AC;) yet the Ground-lines on which they stand, Aβ, Aβ, are Equal to the Double of AC: That is, if to either of those AB, we join Bα equal to the other of them, and with the same Declivity; ACα

(the Distance of Aα) will be a Streight Line equal to the double of AC; as is ACα in the First case.

The greatest difference is this; That in the first Case, the Points B, B, lying in the Line AC, the Lines AB, AB, are the same with their Ground-Lines, but not so in this last case, where BB are so raised above $\beta\beta$ (the respective Points in their Ground-Lines, over which they stand,) as to make the case feasible; (that is, so much as is the versed Sine of CB to the Diameter PC:) But in both ACα (the Ground-Line of ABα) is Equal to the Double of AC.

So that, whereas in case of Negative Roots, we are to say, The Point B cannot be found, so as is supposed in AC Forward, but Backward from A it may in the same Line: We must here say, in case of a Negative Square, the Point B cannot be found so as was supposed, in the Line AC; but Above that Line it may in the same Plain.

This I have the more largely insisted on, because the Notion (I think) is new; and this, the plainest Declaration that at present I can think of, to explicate what we commonly call the *Imaginary Roots* of Quadratick Equations. For such are these.

Tekst 23: Roberval og Pascal om indivisibler

Roberval viste i *Traité des indivisibles* fra 1634 (publiceret 1730), hvordan man kan bestemme arealet af et parabelsegment ved hjælp af såkaldte indivisibler. Argumentet er gengivet i den første tekst nedenfor efter [Andersen 1987, p. 51]. Før det gengivne afsnit har Roberval argumenteret for en sætning, der i moderne notation siger, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2} = \frac{1}{3},$$

hvor der i nævneren står n led.

a) Gør rede for princippet i arealbestemmelse ved hjælp af indivisibler henholdsvis ved hjælp af infinitesimaler.

b) Forklar, hvordan Roberval finder parabelsegmentets areal ved hjælp af ovennævnte sætning. Man kan eventuelt tænke sig parablen er givet ved $y = px^2$, hvor (x, y)-koordinatsystemet er drejet 180° i forhold til, hvad der er sædvanligt.

c) I et brev til Pierre de Carcavy fra 1658 diskuterede Pascal indivisibler. Et uddrag heraf er angivet i den anden tekst nedenfor efter den engelske oversættelse i [Fauvel & Gray 1987, p. 378].

   Diskuter brugen af indivisibler på baggrund af brevet fra Pascal. Hvilken status mente Pascal, at argumenter baseret på dem har?

Roberval

Afhandling om indivisibler

Lad BALMNOPC (fig. 2) være en parabel med toppunkt i A, akse AB og tangent AD. Lad AD være delt ubegrænset i lige store dele AE, EF, FG, GH, HI, ID og lad der fra alle punkterne være trukket linier parallelle med aksen hen til linien CB, det vil sige E1, F2, G3 osv. Lad der endvidere fra de punkter, hvor disse linier skærer parablen, være trukket ordinaterne LQ, MR, NS, OT, PV. Linierne AQ og AR forholder sig til hinanden som kvadratet på linien LQ til kvadratet på linien MR, og linien AR forholder sig til AS som kvadratet på MR til kvadratet på NS, og tilsvarende for resten af linierne.

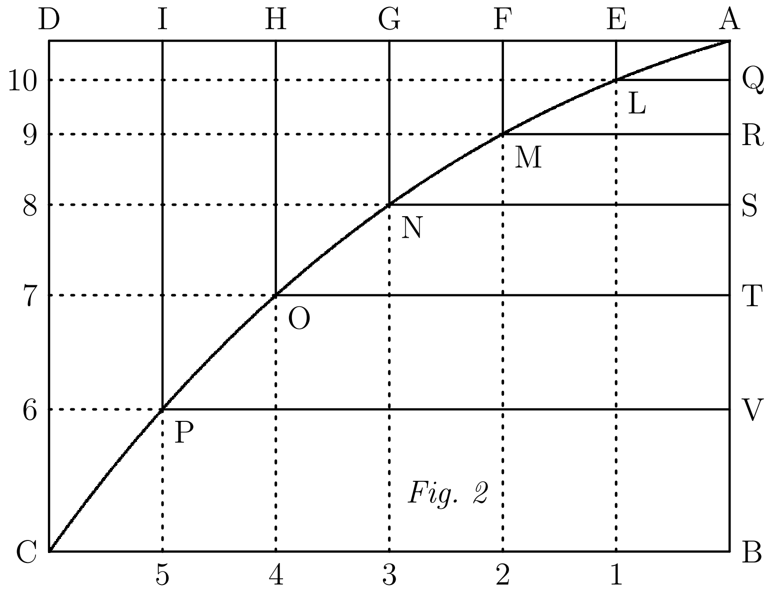


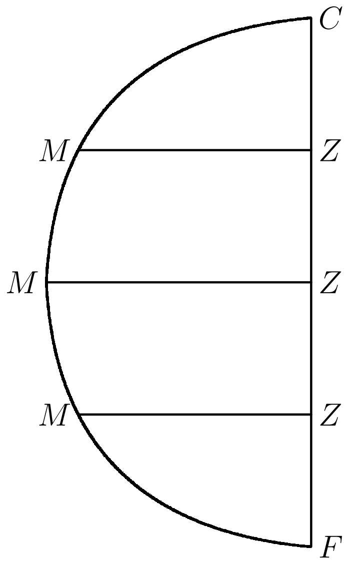
Fig. 2

Nu da linien AD var delt i lige store dele, og da dens dele er lig med ordinaterne, nemlig AE med QL, AF med RM, AG med SN, AH med TO, og AI med VP, så følger det at et kvadrat på en af disse linier overgår det foregående i de ulige tals progression, eller at kvadraterne har sider hvis differens altid er enheden, så hvis den første side er 1, vil de andre være 2, 3, 4, 5, 6. Yderligere er de stykker på aksen, der afskæres af ordinaterne, lig med EL, FM, GN, HO, IP, og DC, og derfor er forholdet mellem sidstnævnte linier lig med forholdet mellem kvadraterne 1, 4, 9, 16, 25 og 36.

Jeg siger derfor, at alle disse linier [EL, FM osv.] taget sammen forholder sig til DC taget i antallet af linier, ligesom summen af kvadraterne ... forholder sig til ... [det sidste kvadrat] taget i antallet af delinger af AD .... Det er altså sandt, at linierne EL, FM, GN, HO, IP og DC forholder sig til linien DC taget i antallet af linier som summen af de nævnte kvadrater til kuben på det største tal. Kuben er imidlertid tre gange summen af kvadraterne, hvorfor den treliniede figur[17] CPONMLAD er en tredjedel af rektanglet CDAB, og således er parablen ABCPONMLA to tredjedele af parallelogrammet eller kvadratet CDAB, hvilket Archimedes har vist på en anden måde.

Blaise Pascal to Pierre de Carcavy

I wanted to write this note to show that everything which is proved by the true rules of indivisibles will also be proved with the rigour and the manner of the ancients, and that therefore the methods differ, the one from the other, only in the way they are expressed: which cannot hurt reasonable people once one has alerted them to what that means.



And that is why I do not find any difficulty in what follows in using the language of indivisibles, the sum of lines or the sum of planes; and thus when for example I consider the diameter of a semicircle divided into an indefinite number of equal parts at the points Z, from which ordinates ZM are taken, I shall find no difficulty in using this expression, the sum of the ordinates, which seems not to be geometric to those who do not understand the doctrine of indivisibles and who imagine that it is to sin against geometry to express a plane by an indefinite number of lines; which only shows their lack of intelligence, for one understands nothing other by that than the sum of an indefinite number of rectangels made on each ordinate with each of the equal portions of the diameter, whose sum is certainly a plane which only differs from the space of the semi-circle by a quantity less than any given quantity.

[17] Roberval bruger glosen *le triligne*.

Tekst 24: Newtons fluxionsteori

Newton skrev sin version af differentialregningen i 1671 i *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* og nedenfor er gengivet udklip fra den engelske oversættelse fra 1737 efter genoptrykket i [Whiteside 1964].

a) Læs først indtil Problem I. Bemærk, at tiden måles ved den tilbagelagte vejstrækning af et punkt, der bevæger sig med konstant hastighed. Hvad er de to centrale problemer? Hvordan defineres $\dot{x}$ og $\dot{y}$?

b) Læs Problem I med løsning og det efterfølgende eksempel I, som forhåbentligt kan afmystificere formuleringen af løsningen. Beskriv skridtene i Newtons metode.

c) Hvis man nu tænker moderne og opfatter x og y som funktioner af parameteren t, så $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ og $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ gør så rede for, at Newtons løsning svarer til resultatet, at hvis $f(x, y) = 0$, så er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Argumentér for, at denne sætning moderne set er korrekt.

d) Udfør Newtons metode på $x^3(y^3+a^2y+b^3)+c^2xy^3 = 0$ og find sammenhængen mellem $\dot{x}$ og $\dot{y}$.

e) Newton hævder, at man i stedet for 0, 1, 2, 3,... kan bruge en generel aritmetisk progression, dvs. en følge $b + a \cdot n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Betragt påny $x^3(y^3 + a^2y + b^3) + c^2xy^3 = 0$ og udfør nu Newtons metode men ved at bruge 6, 4, 2, 0 i stedet for 0, 1, 2, 3 som aritmetisk progression (dvs. som de tal der skal ganges på leddene med den variable i hhv. nulte, første, anden og tredje potens). Vis at det giver samme sammenhæng mellem $\dot{x}$ og $\dot{y}$ som ved brug af 0, 1, 2, 3. Diskutér fleksibiliteten af Newtons metode sammenlignet med vores.

f) Kan du give et generelt argument for at Newtons metode altid fører frem til sammenhængen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

uanset hvilken aritmetisk progression, der anvendes?

g) Læs og gengiv beviset for løsningen til Problem I. Hvorfra tror du, at Newton har hentet bevismetoden?

h) Læs Problem II og tangentbestemmelsen i Problem IV. Bemærk, at

$$TB : BD :: Dc : cd \quad \text{betyder, at} \quad \frac{TB}{BD} = \frac{Dc}{cd}.$$

Vis, at Newtons metode fører frem til følgende udtryk for subtangenten $TB = t$:

$$t = y\frac{dx}{dy}.$$

i) Læs og gengiv Problem IX. Hvilken hovedsætning formuleres heri?

Transition to the Method of FLUXIONS

And thus much for the Methods of Computation, of which I shall make frequent use in what follows. Now it remains, that for an illustration of the Analytic Art, I should give some specimens of Problems, especially such as the nature of Curves will supply. Now in order to this, I shall observe that all the difficulties hereof may be reduced to these two Problems only, which I shall propose, concerning a Space describ'd by local Motion, any how accelerated or retarded.

I. *The length of the Space describ'd being continually (that is, at all times) given; to find the velocity of the motion at any time propos'd.*

II. *The velocity of the motion being continually given; to find the length of the Space describ'd at any time propos'd.*

Thus in the Equation $xx = y$, if y represents the length of the Space at any time describ'd, which (time) another Space x, by increasing with an uniform celerity $\dot{x}$, measures and exhibits as describ'd: then $2\dot{x}x$ will represent the celerity, by which the Space y at the same moment of time proceeds to be describ'd, and contrariwise. And hence it is, that in what follows I consider things as generated by continual Increase, after the manner of a Space, which a thing or point in motion describes.

But since we do not consider the time here, any farther than as it is expounded and measured by an equable local motion; and besides whereas things only of the same kind can be compar'd together, and also their velocities of increase and decrease: therefore in what follows I shall have no regard to time formally consider'd, but shall suppose some one of the quantities propos'd, being of the same kind, to be increas'd by an equable Fluxion, to which the rest may be refer'd, as it were to time; and therefore by way of analogy it may not improperly receive the name of Time. Whenever therefore the word *Time*, occurs in what follows, (which for the sake of perspicuity and distinction I have sometimes used,) by that word I would not have it understood as if I meant Time in its formal acceptation, but only that other quantity, by the equable increase or fluxion whereof, Time is expounded and measured.

Now those quantities which I consider as gradually and indefinitely increasing, I shall hereafter call *Fluents*, or *flowing Quantities*, and shall represent them by the final letters of the alphabet v, x, y, and z; that I may distinguish them from other quantities, which in equations may be considered as known and determinate, and which therefore are represented by the initial letters a, b, c etc. And the velocities by which every Fluent is increased by its generating motion (which I may call *Fluxions*, or simply Velocities, or Celerities,) I shall represent by the same letters pointed thus, $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$; that is, for the celerity of the quantity v I shall put $\dot{v}$, and so for the celerities of the other Quantities x, y, and z, I shall put $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$ respectively. These things being premis'd, I shall now forthwith proceed to the matter in hand; and first I shall give the solution of the two Problems just now propos'd.

Problem I

The Relation the flowing Quantities to one another being given, to determine the Relation of their Velocities.

Solution. Dispose the equation, by which the given Relation is express'd, according to the dimensions of some one of its flowing Quantities, suppose x, and multiply its terms by any arithmetical progression, and then by $\dot{x}/x$; and perform this operation separately for every one of the flowing Quantitites. Then make the sum of all the products equal to nothing, and you will have the equation required.

Example i. If the relation of the flowing quantities x and y be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; first dispose the terms according to the dimensions of x, and then according to y, and multiply them in the following manner.

$$\begin{array}{r|l} \text{Mult. } x^3 - ax^2 + axy - y^3 & -y^3 + axy + x^3 - ax^2 \\ \text{by } 3\dot{x}/x \cdot 2\dot{x}/x \cdot \dot{x}/x \cdot 0 & 3\dot{y}/y \cdot \dot{y}/y \cdot 0 \\ \hline \text{makes } 3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y \ * & -3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x \ * \end{array}$$

the sum of the products is $3\dot{x}x - 2a\dot{x}x + axy - 3\dot{y}y^2 + ayx = 0$, which equation gives the relation between the Fluxions $\dot{x}$ and $\dot{y}$. For if you take x at pleasure, the equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ will give y; which being determin'd, it will be $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$. [...]

Demonstation *of the Solution.*

The Moments of flowing quantities (*i. e.* their indefinitely small parts, by the accession of which, in indefinitely small portions of time they are continually increas'd) are as the velocities of their flowing or increasing. Wherefore if the moment of any one, as x, be represented by the product of its celerity $\dot{x}$ into an indefinitely small quantity o, (*i. e.* by $\dot{x}o$,) the moments of the others v, y, and z, will be represented by $\dot{v}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$; because $\dot{v}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, and $\dot{z}o$, are to each other as $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$. Now since the moments, as $\dot{x}o$ and $\dot{y}o$, are the indefinitely little accessions of the flowing quantities x and y, by which those quantities are increased through the several indefinitely small intervals of time; it follows that those quantities x and y after any indefinitely small interval of time, become $x + \dot{x}o$ and $y + \dot{y}o$: and therefore the equation which at all times indifferently expresses the relation of the flowing quantities, will as well express the relation between $x + \dot{x}o$ and $y + \dot{y}o$, as between x and y: so that $x + \dot{x}o$ and $y + \dot{y}o$, may be substituted in the same equation for those quantities, instead of x and y.

Therefore let any equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ be given, and substitute $x + \dot{x}o$ for x, and $y + \dot{y}o$ for y, and there will arise

$$\begin{aligned}&x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2axo\dot{x} - a\dot{x}^2oo\\&+axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 = 0.\end{aligned}$$

Now by supposition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; which therefore being expung'd, and the remaining terms divided by o, there will remain $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3oo - 2a\dot{x}x - a\dot{x}^2o + a\dot{x}y + a\dot{y}x + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}y^2 - 3\dot{y}^2oy - \dot{y}^3oo = 0$. But whereas o is suppos'd to be indefinitely little, that it may represent the moments of quantities, consequently the terms that are multiplied by it, will be nothing in respect of the rest: therefore I reject them, and there remains $3x^2\dot{x} - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$, as above in Example I.

Here it may be observed, that the terms which are not multiplied by o will always vanish; as also those terms that are multiplied by more than one dimension of o; and that the rest of the terms being divided by o, will always acquire the form that they ought to have by the foregoing rule. Q. E. D.

This being done the other things inculcated in the rule will easily follow. As that in the propos'd equation, several flowing quantities may be involv'd; and that the terms may be multiply'd, not only by the number of the dimensions of the flowing quantities, but also by any other arithmetick progression, so that in the operation there may be the same difference of the terms according to any of the flowing quantities, and the progression be dispos'd according to some order of the dimensions of each of them. These things being allow'd, what is taught besides in Examples 3, 4, and 5, will be plain enough of itself.

Problem II.

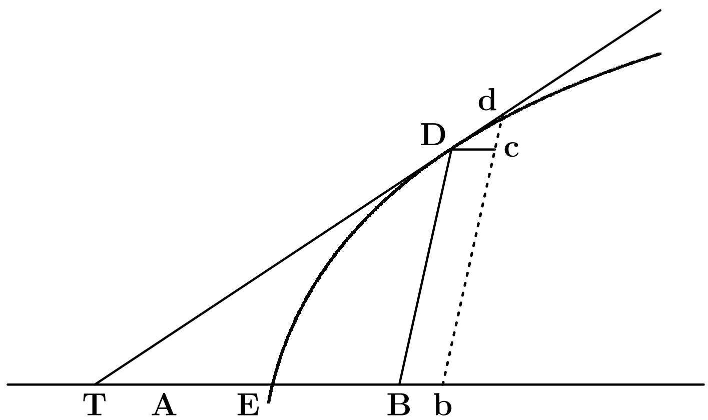
An Equation being propos'd including the Fluxions of Quantities, to find the Relation of those Quantities to one another.

A particular Solution

As this problem is the converse of the foregoing, it must be solv'd by proceeding in a contrary manner; [...]

Problem IV.
To draw Tangents to Curves.
The First manner.

Tangents may be variously drawn according to the various relation of curves to right lines; and first, let BD be a right line or ordinate in a given angle to another right line AB, as a base or absciss, and terminated at the curve ED; let this ordinate move thro' an indefinite small space to the place *bd*, so that it may be increased by the moment *cd*, while AB is increased by the moment B*b* to which D*c* is equal and parallel, let D*d* be produced till it meet with AB in T, and this line will touch the curve in D or *d*, and the triangles *dc*D, DBT will be similar; so that TB : BD :: D*c*, or B*b* : *cd*. Since therefore the relation of BD to AB is exhibited by the equation by which the nature of the curve is determined, seek for the relation of the Fluxion by Prob. I. Then take TB to BD in the ratio of the Fluxion of AB to the Fluxion of BD, and TD will touch the curve in the point D.



Example i. Calling AB $= x$ and BD $= y$, let their relations be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, and the relation of the Fluxion will be $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, so that $\dot{y} : \dot{x} :: 3xx - 2ax + axy + ay : 3y^2 - ax ::$ BD or (y) : BT. Therefore

$$\mathrm{BT} = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay};$$

therefore the point D being given, and thence DB and AB, or y and x, the length will be given by which the tangent TD is determined.

But this method of operation may be thus concinnated: make the terms of the proposed equation equal to nothing, then multiply by the proper number of the dimension of the ordinate, and put the result in the numerator; then multiply the same equation by the proper number of the dimensions of the absciss, and put the product divided by the absciss in the denominator of the value of BT; then take BT towards A if this value be affirmative, but the contrary way if the value be negative.

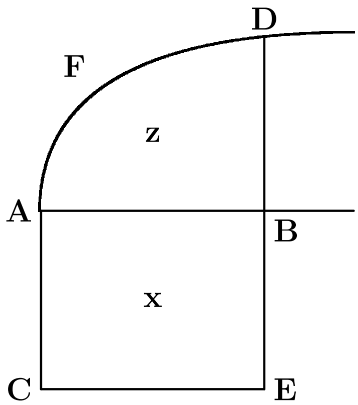
Thus the equation

$$\underset{3}{\overset{0}{x^3}} - \underset{2}{\overset{0}{ax^2}} + \underset{1}{\overset{1}{axy}} - \underset{0}{\overset{3}{y^3}} = 0,$$

being multiplied by the upper numbers gives $axy - 3y^3$ for the numerator, and multiplied by the lower numbers, and then divided by x, gives $3x^2 - 2ax + ay$ for the denominator of the value of BT. [...]

Problem IX.
To determine the Area of any Curve proposed.

The Resolution of the Problem depends upon this; that from the relation of the Fluxions being given, the relation of the Fluents may be found as in Prob. II. First if the Right Line BD, by the motion of which the Area required AFDB is discribed, move upright upon an Absciss or Base AB given in position, conceive (as before) the parallelogram ABEC to be described in the mean time on the other side BE by a Line equal to 1, and BE being supposed equal to the Fluxion of the Parallelogram, BD be the Fluxion of the Area required.



Therefore make AB $= x$, then ABEC $\times$ 1 $= 1 \times x = x$ and BE $= \dot{x}$, call AFDB $= z$, and it will be BD $= \dot{z}$, as also $\dot{z}/\dot{x}$, because $\dot{x} = 1$; therefore by the equation expressing BD, at the same time the ratio of the Fluxion $\dot{z}/\dot{x}$ is expressed, and thence (by Prob. II. *Case* I.) may be found the relation of the Flowing Quantities x and z.

Example I. *When BD or $\dot{z}$ is equivalent to some simple Quantity.*

Let there be given $\frac{xx}{a} = \dot{z}$, or $\dot{z}/\dot{x}$, the equation to the Parabola; and (by Prob. II.) there will arise $x^3/3a = z$; therefore $x^3/3a$, or $\frac{1}{3}$AB $\times$ BD is equal to the Area of the Parabola AFDB.

Tekst 25: Leibniz' metode

Leibniz udgav aldrig selv en grundig indføring i de basale begreber i hans differentialregning. Ideerne blev dog via Johann Bernoulli videregivet til franskmanden l'Hospital, som udgav dem i værket *Analyse des infiniment petits* i 1696. Denne er at betragte som den første lærebog i differentialregning.

Nedenfor følger et uddrag af begyndelsen af 2. udgaven fra 1715 i dansk oversættelse fra [l'Hospital 1988, pp. 25–38].

a) Hvad er de grundlæggende begreber i Leibniz' (l'Hospitals) version af differentialregningen?

b) Find differensen af x/y ved brug af Leibniz' metode, dvs. ved at gøre det analogt med Proposition I og II i første afsnit.

c) Find subtangenten til $y = x^m$, hvor m er et naturligt tal, ved at efterligne metoden i Proposition I i afsnit II.

d) Diskuter forskelle og ligheder mellem Newtons og Leibniz' version af differentialregningen. Sammenlign fx dx og $\dot{x}$.

De uendeligt små størrelsers analyse

Første del om differensregning

Første afsnit hvor reglerne for denne regning gives

DEFINITION I

Størrelser, der uafbrudt vokser eller aftager, kaldes *variable* størrelser, hvorimod de, der forbliver de samme, medens de andre ændrer sig, kaldes *konstante* størrelser. I en parabel er ordinaterne og abscisserne[1] således variable størrelser, medens parameteren er en konstant størrelse.

DEFINITION II

Den uendeligt lille del, hvormed en variabel størrelse uafbrudt vokser eller aftager, kaldes *differensen.*

Fig. 1 Lad for eksempel AMB være en kurve, der som akse eller diameter har linien AC og som en af sine ordinater PM; lad endvidere pm være en ordinat uendeligt tæt ved den første. Med dette forudsat tegnes MR parallel med AC, korderne AM og Am, den lille cirkelbue MS med centrum A og radius AM, så vil Pp

[1] L'Hospital bruger udtrykkene *les appliquée et les coupées.*

være AP's differens, Rm være PM's, Sm være AM's og Mm være buen AM's. Ligeledes vil den lille trekant MAm, der har buen Mm som grundlinie være differensen af afsnittet AM, og det lille areal $MPpm$ være differensen af arealet begrænset af AP, PM og buen AM.

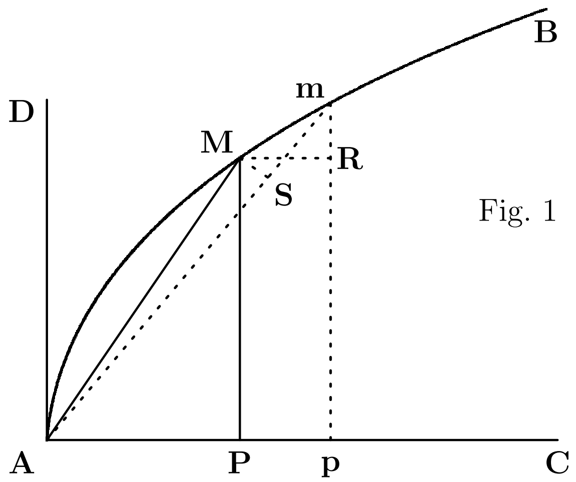


Fig. 1

Korollar

1. Det er klart, at differensen af en konstant størrelse er nul, eller (hvad der er det samme) at konstante størrelser ingen differenser har.

Note

I det følgende bruges betegnelsen eller symbolet d til at betegne differensen af en variabel størrelse, som man har udtrykt ved et enkelt bogstav, og for at undgå forvirring gøres der ingen anden brug af d i det følgende. Hvis man for eksempel kalder AP, x; PM, y; AM, z; buen AM, u; det krum- og retlinede areal APM, s; og afsnittet AM, t, så udtrykker dx værdien af Pp, dy værdien af Rm, dz værdien af Sm, du værdien af den lille bue Mm, ds værdien af det lille areal $MPpm$, og dt værdien af den lille krum- og retlinede trekant MAm.

I. Krav eller antagelse

2. Det kræves, at når to størrelser kun adskiller sig med en uendeligt lille størrelse, kan man uden forskel tage den ene for den anden. Eller (hvad der er det samme) at en størrelse, som kun er forøget eller formindsket med en anden størrelse, der er uendeligt mindre end den selv, kan betragtes som forblivende sig selv. Der kræves for eksempel, at man kan tage Ap for AP, pm for PM, arealet Apm for arealet APM, det lille areal $MPpm$ for det lille rektangel $MPpR$, den lille sektor AMm for den lille trekant AMS, vinklen pAm for vinklen PAM etc.

II. Krav eller antagelse

3. Det kræves, at en kurve kan betragtes som en uendelig samling af rette linie[stykker], eller (hvad der er det samme) som en polygon med et uendeligt antal sider — hver uendeligt lille. Ved de vinkler, siderne danner med hinanden, bestemmer de kurvens krumning. Der kræves for eksempel, at kurvestykket Mm og cirkelbuen Ms på grund af deres uendelige lidenhed kan betragtes som rette linier således, at den lille trekant mSM kan opfattes som retlinet.

Note

Det antages sædvanligvis i det følgende, at alfabetets sidste bogstaver z, y, x etc. betegner variable størrelser, hvorimod de første a, b, c etc. betegner konstante størrelser således, at x bliver $x + dx$; y, z etc. bliver $y + dy$, $z + dz$ etc., og a, b,
Art. 1 c, etc. forbliver de samme a, b, c etc.

Proposition I
Problem

4. At tage differensen af flere størrelser, der er lagt til eller trukket fra hinanden.

Lad der være givet $a+x+y-z$, af hvilken differensen skal tages. Hvis det antages, at x forøges med en uendeligt lille del, det vil sige, at den bliver $x + dx$, så bliver
Art. 1 y, $y+dy$ og z, $z+dz$, medens konstanten a forbliver den samme, a. Således bliver den givne størrelse $a + x + y - z$, $a + x + dx + y + dy - z - dz$, og dens differens, som man finder ved at trække den fra den sidste størrelse, bliver $dx + dy - dz$. Det er ligesådan med de andre, hvilket giver denne regel.

Regel I
For adderede eller subtraherede størrelser.

Man tager differensen af hvert led i den givne størrelse, og idet man beholder de samme fortegn, sammensættes en anden størrelse, som er den søgte differens.

Proposition II
Problem

5. At tage differensen af et produkt frembragt af flere størrelser, der er ganget med hinanden.

1°. Differensen af xy er $y\,dx + x\,dy$. Thi når x bliver $x + dx$, bliver y, $y + dy$, og xy bliver

$$xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy,$$

som er produktet af $x + dx$ og $y + dy$. Produktets differens er

$$y\,dx + x\,dy + dx\,dy,$$

det vil sige, $y\,dx + x\,dy$, fordi $dx\,dy$ er en uendelig lille størrelse i forhold til de andre led $y\,dx$ og $x\,dy$: dividerer man for eksempel $y\,dx$ og $dx\,dy$ med dx, finder man dels y og dels dy, som er y's differens og derfor uendelig meget mindre end den. Heraf følger, at differensen af et produkt af to størrelser er lig med produktet af den første størrelses differens og den anden størrelse plus produktet af den andens differens og den første. Art. 2

2°. Differensen af xyz er $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ [...] [Beviset er analogt til det første under 1°].

3°. Differensen af $xyzu$ er

$$uyz\,dx + uxz\,dy + uxy\,dz + xyz\,du$$

[...]

Det forholder sig således med de andre i det uendelige, hvoraf denne regel dannes.

Regel II

For multiplicerede størrelser.

Differensen af et produkt af flere multiplicerede størrelser er lig med summen af produkterne af hver enkelts differens og de øvriges produkt.

Således er differensen af ax, $x0 + a\,dx$, det vil sige $a\,dx$. Differensen af[2] $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ er $b\,dx - y\,dx - a\,dy - x\,dy$. [...]

Afsnit II
Anvendelse af differensregningen til at bestemme tangenter til alle slags kurver

Definition

Hvis man forlænger en af de små sider Mm i den polygon, som udgør en kurve, Fig. 2
så kaldes den således forlængede side *tangenten* til kurven i punktet M eller m. Art. 3

Proposition I

Problem

9. Lad AM være en kurve, hvor relationen mellem abscissen AP og ordinaten PM er udtrykt ved en [algebraisk] ligning. I et givet punkt M på denne kurve skal tangenten M trækkes. Fig. 3

[2] På l'Hospitals tid var det almindeligt at sætte streg over størrelser, vi nu ville sætte i parentes.

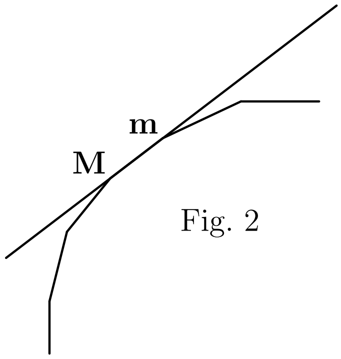


Fig. 2

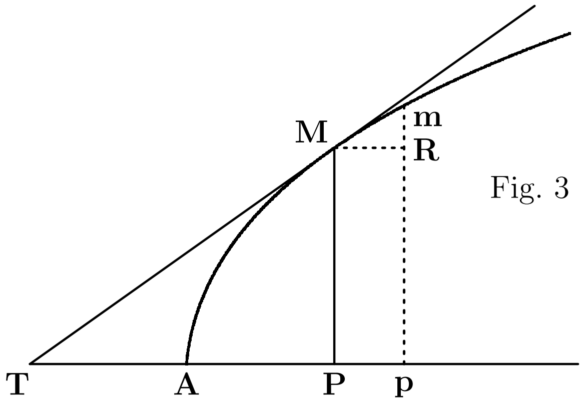


Fig. 3

Ordinaten MP tegnes, og det antages, at den rette linie MT, som skærer diametren i punktet T, er den søgte tangent. Man forestiller sig derefter, at en anden ordinat mp er trukket uendeligt tæt ved den første sammen med den lille rette linie MR parallel med AP. Når de givne AP og PM kaldes x og y (hvorfor Pp eller $MR = dx$ og $Rm = dy$), så giver de ensvinklede trekanter mRM og MPT, at[3]

$$mR(dy).RM(dx) :: MP(y).PT = \frac{y\,dx}{dy}.$$

Ved hjælp af den givne lignings differens finder man en værdi for dx [udtrykt] i led, der alle indeholder dy; værdien for dx ganget med y og divideret med dy giver en værdi for subtangenten[4] PT i led, der er fuldstændigt kendte og befriet for differenser. Værdien for PT bruges til at tegne den søgte tangent MT.
[...]

Eksempel I

1°. Hvis man kræver, at $ax = yy$ skal udtrykke relationen mellem AP og PM, er kurven AM en parabel, der som parameter har det givne rette linie[stykke] a. Ved at tage differenserne på begge sider får man

$$a\,dx = 2y\,dy$$

og

$$dx = \frac{2y\,dy}{a}$$

[3]Bag denne kompakte skriveform, der i originalen ser ud som angivet, gemmer sig følgende: $mR : RM = MP : PT$ eller da $mR = dy$, $RM = dx$, $MP = y$, $dy : dx = y : PT$, hvoraf $PT = \frac{y\,dx}{dy}$.

[4]Projektionen af tangentstykket MT på aksen, PT, kaldes subtangenten. Når man kender længden af PT, kan man tegne tangenten MT.

og

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = \frac{2yy}{a} = 2x,$$

idet der for yy sættes dens værdi ax. Heraf følger, at når man tager PT som det dobbelte af AP og trækker den rette linie MT, så er den tangenten i punktet M. Det var det, der var forlangt.

2°. Lad ligningen være $aa = xy$, den udtrykker hyperbelens natur mellem asymptoterne. Ved at tage differenserne får man Fig. 4

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

hvorfor

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = -x.$$

Heraf følger, at hvis man tager $PT = PA$ til den modsatte side af punktet A og trækker den rette linie MT, så er den tangenten i M.

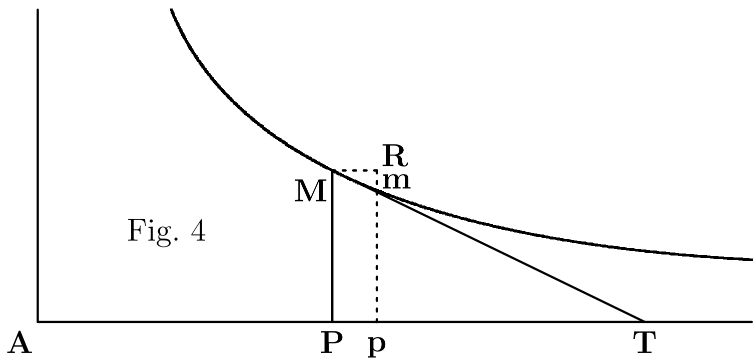


Fig. 4

Tekst 26: Berkeley om analysens grundlag

Et af de skarpeste og mest betydningsfulde angreb på infinitesimalregningens manglende grundlag kom udenfor matematikerkredse fra biskop Berkeley i *The Analyst* fra 1734. Værket var på 104 sider og nedenfor er gengivet udklip taget fra [Smith 1959, pp. 627–34]. Berkeleys angreb fik stor betydning især for analysens udvikling i England. Det er almindelig antaget at den "vantro matematiker", som værket var henvendt til, var astronomen Edmund Halley, hvis religiøse skepticisme var velkendt i samtiden.

a) Hvad vil Berkeley opnå med værket?

b) Formuler *Berkeleys lemma*. Er det et alment princip, som du vil acceptere?

c) Hvad er Berkeleys indvendinger mod bestemmelsen af fluxioner for x^n?

d) Tror Berkeley på de resultater, som man har opnået med fluxionsregningen?

e) Diskuter forskellen mellem religiøs og matematisk viden ifølge Berkeley.

Berkeley
A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician

Though I am a stranger to your person, yet I am not, Sir, a stranger to the reputation you have acquired in that branch of learning which hath been your peculiar study; nor to the authority that you therefore assume in things foreign to your profession; nor to the abuse that you, and too many more of the like character, are known to make of such undue authority, to the misleading of unwary persons in matters of the highest concernment, and whereof your mathematical knowledge can by no means qualify you to be a competent judge. [...]

Whereas then it is supposed that you apprehend more distinctly, consider more closely, infer more justly, and conclude more accurately than other men, and that you are therefore less religious because more judicious, I shall claim the privilege of a Freethinker; and take the liberty to inquire into the object, principles, and method of demonstration admitted by the mathematicians of the present age, with the same freedom that you presume to treat the principles and mysteries of Religion; to the end that all men may see what right you have to lead, or what encouragement others have to follow you. [...]

The Method of Fluxions is the general key by help whereof the modern mathematicians unlock the secrets of Geometry, and consequently of Nature. And, as it is that which hath enabled them so remarkably to outgo the ancients in discovering theorems and solving problems, the exercise and application thereof is become the main if not the sole employment of all those who in this age pass for profound geometers. But whether this method be clear or obscure, consistent or repugnant, demonstrative or precarious, as I shall inquire with the utmost impartiality, so I submit my inquiry to your own judgment, and that of every candid reader. — Lines are supposed to be generated[1] by the motion of points, planes by the motion of lines, and solids by the motion of planes. And whereas quantities generated in equal times are greater or lesser according to the greater or lesser velocity wherewith they increase and are generated, a method hath been found to determine quantities from the velocities of their generating motions. And such velocities are called fluxions: and the quantities generated are called flowing quantities. These fluxions are said to be nearly as the increments of the flowing quantities, generated in the least equal particles of time; and to be accurately in the first proportion of the nascent, or in the last of the evanescent increments. Sometimes, instead of velocities, the momentaneous increments or

[1] *Introd. ad Quadraturam Curvarum.*

decrements of undetermined flowing quantities are considered, under the appellation of moments.

By moments we are not to understand finite particles. These are said not to be moments, but quantities generated from moments, which last are only the nascent principles of finite quantities. It is said that the minutest errors are not to be neglected in mathematics: that the fluxions are celerities, not proportional to the finite increments, though ever so small; but only to the moments or nascent increments, whereof the proportion alone, and not the magnitude, is considered. And of the aforesaid fluxions there be other fluxions, which fluxions of fluxions are called second fluxions. And the fluxions of these second fluxions are called third fluxions: and so on, fourth, fifth, sixth, etc., *ad infinitum*. [...] But the velocities of the velocities — the second, third, fourth, and fifth velocities, etc. — exceed, if I mistake not, all human understanding. [...]

Berkeley diskuterer herefter konkrete eksempler og forskellige metoder til at finde fluxionerne.

[...] But whether this method be more legitimate and conclusive that the former, I proceed now to examine; and in order thereto shall premise the following lemma: — "If, with a view to demonstrate any proposition, a certain point is supposed, by virtue of which certain other points are attained; and such supposed point be itself afterwards destroyed or rejected by a contrary supposition; in that case, all the other points attained thereby, and consequently thereupon, must also be destroyed and rejected, so as from thenceforward to be no more supposed or applied in the demonstration."[2] This is so plain as to need no proof.

Now, the other method of obtaining a rule to find the fluxion of any power is as follows. Let the quantity x flow uniformly, and be it proposed to find the fluxion of x^n. In the same time that x by flowing becomes $x+o$, the power x^n becomes $\overline{x+o}^n$, i.e., by the method of infinite series

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&\text{c.},$$

and the increments

$$o \text{ and } nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&\text{c.}$$

are one to another as

$$1 \text{ to } nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \&\text{c.}$$

Let now the increments vanish, and their last proportion will be 1 to nx^{n-1}. But it should seem that this reasoning is not fair or conclusive. For when it is said,

[2]Berkeley's *lemma* was rejected as invalid by James Jurin and some other mathematical writers. The first mathematician to acknowledge openly the validity of Berkeley's *lemma* was Robert Woodhouse in 1803.

let the increments vanish, i. e., let the increments be nothing, or let there be no increments, the former supposition that the increments were something, or that there were increments, is destroyed, and yet a consequence of that supposition, i. e., an expression got by virtue thereof, is retained. Which by the foregoing lemma, is a false way of reasoning. Certainly when we suppose the increments to vanish, we must suppose their proportions, their expressions, and everything else derived from the supposition of their existence, to vanish with them. [...]

I have no controversy about your conclusions, but only about your logic and method: how you demonstrate? what objects you are conversant with, and whether you conceive them clearly? what principles you proceed upon; how sound they may be; and how you apply them? [...]

The great author of the metod of fluxions felt this difficulty, and therefore he gave in to those nice abstractions and geometrical metaphysics without which he saw nothing could be done on the received principles: and what in the way of demonstration he hath done with them the reader will judge. It must, indeed, be acknowledged that he used fluxions, like the scaffold of a building, as things to be laid aside or got rid of as soon as finite lines were found proportional to them. But then these finite exponents are found by the help of fluxions. Whatever therefore is got by such exponents and proportions is to be ascribed to fluxions: which must therefore be previously understood. And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments. And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them the ghosts of departed quantities? [...]

And, to the end that you may more clearly comprehend the force and design of the foregoing remarks, and pursue them still farther in your own meditations, I shall subjoin the following Queries: —

[...]

Qu. 4. Whether men may properly be said to proceed in a scientific method, without clearly conceiving the object they are conversant about, the end proposed, and the method by which it is pursued? [...]

Qu. 8. Whether the notions of absolute time, absolute place, and absolute motion be not most abstractely metaphysical? Whether it be possible for us to measure, compute, or know them?

[...]

Qu. 16. Whether certain maxims do not pass current among analysts which are shocking to good sense? And whether the common assumption, that a finite quantity divided by nothing is infinite, be not of this number?[3] [...]

Qu. 31. Where there are no increments, whether there can be any *ratio* of in-

[3]The earliest exclusion of division by zero in ordinary elementary algebra, on the ground of its being a procedure that is inadmissible according to reasoning based on the fundamental assumptions of this algebra, was made in 1828, by Martin Ohm, in his *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik*, Vol. I, p. 112. In 1872, Robert Grassmann took the same position. But not until about 1881 was the necessity of excluding division by zero explained in elementary school books on algebra.

crements? Whether nothings can be considered as proportional to real quantities? Or whether to talk of their proportions be not to talk nonsense? [...]

Qu. 63. Whether such mathematician as cry out against mysteries have ever examined their own principles?

Qu. 64. Whether mathematicians, who are so delicate in religious points, are strictly scrupulous in their own science? Whether they do not submit to authority, take things upon trust, and believe points inconceivable? Whether they have not *their* mysteries, and what is more, their repugnances and contradictions? [...]

Tekst 27: Eulers formler

I bind 1 af *Introductio in analysin infinitorum* fra 1748 behandlede Euler sammenhængen mellem de trigonometriske funktioner og eksponentialfunktionen. Det var hans konsekvente brug af betegnelserne $\sin x$ og $\cos x$ for sinus og cosinus, samt π for den halve omkreds af enhedscirklen, der gjorde, at disse fik almindelig udbredelse i den matematiske symbolik.

Nedenfor er gengivet uddrag af hans behandling i den engelske oversættelse i [Fauvel & Gray 1987, pp. 449–51].

a) Gennemgå Eulers udledning af rækkeudviklingerne for $\sin x$ og $\cos x$. Hvilken formel baseres udledelsen på?

b) Gennemgå udledningen af Eulers formler.

c) Kommenter Eulers brug af uendelig små og store størrelser.

Euler's unification of the theory of elementary functions

126. After logarithms and exponential quantities we shall investigate circular arcs and their sines and cosines, not only because they constitute another type of transcendental quantity, but also because they can be obtained from these very logarithms and exponentials when imaginary quantities are involved.

Let us therefore take the radius of the circle, or its sinus totus, $= 1$. Then it is obvious that the circumference of this circle cannot be exactly expressed in rational numbers, but it has been found that the semicircumference is by approximation $= 3.14159.26535.89793\ldots$ [127 decimal places are given] for which number I would write for short π, so that π is the semicircumference of the circle of which the radius $= 1$, or π is the length of the arc of 180 degrees.

127. If we denote by z an arbitrary arc of this circle, of which I always assume the radius $= 1$, then we usually consider of this arc mainly the sine and cosine. I shall denote the sine of the arc z in the future in this way $\sin A.z$, or only $\sin z$; and the cosine accordingly $\cos A.z$, or only $\cos z$. Hence we shall have, since π is the arc of 180°, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ and $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$.

[After a whole set of trigonometric formulas and identities, Euler continues as follows.]

132. Since $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$, we shall have by factorization $(\cos z + i \sin z) \times (\cos z - i \sin z) = 1$, which factors, although imaginary, still are of great use in combining and multiplying sines and cosines.

[Now comes De Moivre's theorem (though the name is not mentioned), from which follows, in §133:]

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2}$$

and

$$\sin nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i}.$$

When we develop these binomial in a series we shall get

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{1.2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2 + \text{etc.}$$

and

$$\sin nz = \frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3 + \text{etc.}$$

134. Let the arc z be infinitely small; then we get $\sin z = z$ and $\cos z = 1$; let now n be an infinitely large number, while the arc nz is of finite magnitude.

Take $nz = v$; then since $\sin z = z = v/n$ we shall have

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \cdots + \text{etc.}$$

and

$$\sin v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \cdots + \text{etc.}$$

138. Let us now take in the formulas of §133 the arc z infinitely small and let n be an infinitely large number ε such that εz will take the finite value v. We thus have $\varepsilon z = v$ and $z = v/\varepsilon$, hence $\sin z = v/\varepsilon$ and $\cos z = 1$. After substituting these values we find

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{vi}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon} + \left(1 - \frac{vi}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon}}{2},$$

$$\sin v = \frac{\left(1+\frac{vi}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon} - \left(1-\frac{vi}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon}}{2i}.$$

In the previous chapter we have seen that

$$\left(1+\frac{z}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon} = e^{z},$$

where by e we denote the base of the hyperbolic logarithms; if we therefore write for z first iv, then $-iv$, we shall have

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}$$

and

$$\sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}.$$

From these formulas we can see how the imaginary exponential quantities can be reduced to the sine and cosine of real arcs. Indeed, we have

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v,$$

$$e^{-iv} = \cos v - i \sin v.$$

Tekst 28: Euler om alg. fundamentalsætning

I artiklen "Recherches sur les racines imaginaires des equations", *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* **5** (1749), pp. 222–88 (publiceret i 1751) søgte Euler bl.a. at vise algebraens fundamentalsætning. En dansk oversættelse af nogle udklip fra denne artikel er gengivet nedenfor efter genoptrykket i Eulers samlede værker [Euler 1921, pp. 78–107].

Diskussionen af algebraens fundamentalsætning omfatter den første halvdel af artiklen, hvorfra nedenstående er taget. Diskussionen føres videre i den anden halvdel, som ikke er medtaget, og heri viser Euler bl.a. også, at de komplekse tal er lukket under de fire regneoperationer, roduddragning, potensopløftning, de trigonometriske funktioner osv.

a) Hvilken vigtig sætning fra analysen bruger Euler i beviset for sætning 1?

b) Kommenter korollaret efter sætning 1. Hvilket resultat bruger Euler til at udlede det med? Hvordan passer det ind i den logiske struktur af artiklen? Kunne Euler have givet et bedre argument på dette sted?

c) Fuldfør argumentet for at α og β er reelle i beviset for sætning 4.

d) Kommenter korollar 1 efter sætning 7. Hvordan indses, at alle ligninger af lavere grad end 32 kan opløses i første- og andengradsfaktorer?

e) Hvordan lyder Eulers formulering af algebraens fundamentalsætning?

f) Hvad angiver Euler som den vigtigste anvendelse af algebraens fundamentalsætning?

g) Hvilken status har beviset hos Euler, ifølge hans sidste bemærkning?

h) Er Eulers bevis en cirkelsluting?

Søgning efter ligningernes imaginære rødder

1. Enhver algebraisk ligning givet ved brøker og radikaler lader sig altid reducere til denne generelle form

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \cdots + N = 0$$

hvor bogstaverne $A, B, C, D, \ldots N$ står for konstante reelle størrelser, enten positive eller negative uden at nul er udelukket. Rødder i en sådan ligning er de værdier, som tildelt x frembringer den identiske ligning $0 = 0$.

Euler anfører herefter nogle elementære resultater om n'te gradsligninger, nemlig:

1. Hvis $x + \alpha$ går op i ligningen, så er $-\alpha$ rod i ligningen. Kan man faktorisere ligningen har man dermed også bestemt rødderne.

2. Hvis ligningen kan opsplittes i n faktorer, så den kommer på formen

   $$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta) \cdots (x + \nu) = 0$$

   så vil

   - A være summen af størrelserne α, β, γ, δ,... ν,
   - B være summen af produkterne, hvori disse indgår to og to,
   - C være summen af produkterne, hvori de indgår tre og tre,
   - $\vdots$
   - N produktet af dem alle: $\alpha\beta\gamma\delta \ldots \nu$.

3. Hvis $x + y\sqrt{-1}$ er rod i ligningen er også $x - y\sqrt{-1}$ dette.

Derefter opløser han nogle konkrete ligninger i faktorer, før han går over til den generelle teori.

SÆTNING 1

20. *Enhver ligning af ulige grad, hvis generelle form er*

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \cdots + N = 0,$$

har altid mindst én reel rod, og hvis den har flere vil antallet være ulige.[1]

BEVIS

Man sætter

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + \cdots + N = y$$

og man betragter kurven udtrykt ved denne ligning; og det er klart, at til enhver abscisse x svarer kun én ordinat y, som altid er reel; og at der hvor ordinaten y forsvinder, vil værdien af abscissen x være en rod i den angivne ligning. Altså denne ligning vil have lige så mange reelle rødder som der er punkter, hvori ordinaten y forsvinder, hvilket sker der hvor kurven skærer abscisseaksen; således at antallet af reelle rødder vil være lig antallet af skæringer mellem kurven og aksen på hvilken man tager abscisserne. For at kunne bedømme antallet af sådanne skæringer, antag først at abscissen x er positiv og uendelig stor eller $x = \infty$, og det er klart, at så bliver

$$y = \infty^{2m+1} = \infty,$$

hvoraf følger, at grenen af kurven som svarer til positive uendelige abscisser befinder sig over aksen, da deres ordinater y er positive. Men antag nu abscisserne negative og også uendelige eller $x = -\infty$, da bliver

$$y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty;$$

altså bliver ordinaterne her negative, og grenen af kurven befinder sig under aksen. Da denne gren er sammenhængende med den anden over aksen er det absolut nødvendigt, at kurven skærer aksen et eller andet sted, og hvis den skærer den i flere punkter, må antallet af sådanne punkter være ulige. Af dette følger, at den angivne ligning nødvendigvis vil have mindst én reel rod, og hvis den har flere, at antallet altid vil være ulige. Q.E.D.

KOROLLAR

21. Altså da det samlede antal af rødder i den angivne ligning er $= 2m + 1$ eller ulige, og antallet af reelle rødder også er ulige, følger heraf, at antallet af imaginære rødder, hvis den har nogen, altid vil være lige.

Sætning 2 giver det tilsvarende resultat for ligninger af lige grad, dvs. at en ligning af lige grad har et lige antal reelle rødder, hvis der er nogen. I beviset anvendes kurven hørende til ligningen ganske ligesom i beviset for sætning 1. Også for den efterfølgende sætning 3 gives et grafisk bevis.

[1] Euler tæller her og i det følgende rødderne med multiplicitet uden at han dog angiver dette.

SÆTNING 3

25. *Enhver ligning af lige grad, hvor det sidste led, det konstante led, har en negativ værdi, som i*

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \cdots - OO = 0,$$

har altid mindst to reelle rødder: en positiv og en negativ.
[...]

SÆTNING 4

27. *Enhver ligning af fjerde grad, som*

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

kan altid opsplittes i to reelle faktorer af anden grad.

BEVIS

Det vides, at sættes $x = y - \frac{1}{4}A$ ændres denne ligning til en anden af samme grad, hvori det andet led mangles; og da denne transformation altid kan laves, antag så at det andet led allerede mangles i den angivne ligning og at vi har denne ligning

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

at skulle opløse i to reelle faktorer af anden grad; og det er straks klart at disse to faktorer vil være på formen

$$(xx + ux + \alpha)(xx - ux + \beta) = 0,$$

hvis produkt ved sammenligning med den angivne ligning, giver os

$$B = \alpha + \beta - uu, \quad C = (\beta - \alpha)u, \quad D = \alpha\beta,$$

hvoraf vi uddrager

$$\alpha + \beta = B + uu, \quad \beta - \alpha = \frac{C}{u}$$

og videre

$$2\beta = uu + B + \frac{C}{u} \text{ og } 2\alpha = uu + B - \frac{C}{u};$$

anvendes at $4\alpha\beta = 4D$, opnår vi denne ligning

$$u^4 + 2Buu + BB - \frac{CC}{uu} = 4D$$

eller

$$u^6 + 2Bu^4 + (BB - 4D)uu - CC = 0,$$

hvori det er nødvendigt at finde u. Men da det konstante led $-CC$ er negativt, har vi vist, at denne ligning har mindst to reelle rødder; tag altså en af disse som u, så vil værdierne af α og β være reelle og som konsekvens vil de to postulerede faktorer af anden grad $xx + ux + \alpha$ og $xx - ux + \beta$ være reelle. Q.E.D.

Euler konstaterer derefter, at dette resultat ikke er så mærkeligt, selv om der kan være imaginære rødder: en imaginær rod og dens konjugerede (som jo også er rod) ganger sammen til en reel andengradsfaktor. Som illustration gennemregnes dernæst opløsningen af en konkret fjerdegradsligning.

I det efterfølgende skolium diskuterer Euler, hvorfor beviset ovenfor fungerer.

33. [...] Er altså den angivne ligning allerede uden det andet led

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

og har denne ligning de fire rødder

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c, \quad x = d,$$

er det straks klart, at summen af de fire rødder

$$a + b + c + d$$

vil være lig med nul.

Tages dernæst i almindelighed en af de dobbelte faktorer i denne ligning $xx - ux + \beta$ hvor

$$xx - ux + \beta = 0,$$

er det sikkert, at u vil være summen af to af de fire rødder a, b, c, d. Altså da dette bogstav u betragtes som vores ubekendte kan den have alle de forskellige værdier, som der er mulige kombinationer af de fire a, b, c, d. Men da dette antal af kombinationer er, som det vides, $= \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$, er bogstavet u i stand til at antage 6 forskellige værdier og ikke flere. Altså vil bogstavet u være bestemt af en ligning af 6. grad, som vil have de seks følgende rødder:

$$\begin{gathered} \text{I. } u = a + b, \quad \text{II. } u = a + c, \quad \text{III. } u = a + d, \\ \text{IV. } u = c + d, \quad \text{V. } u = b + d, \quad \text{VI. } u = b + c. \end{gathered}$$

Altså da $a + b + c + d = 0$ vil, hvis vi tager de tre første af de seks rødder som

$$\text{I. } u = p, \quad \text{II. } u = q, \quad \text{III. } u = r,$$

de sidste tre blive

$$\text{IV. } u = -p, \quad \text{V. } u = -q, \quad \text{VI. } u = -r,$$

således at den negative af hver værdi af u også bliver en værdi for u.

Idet disse seks rødder nu er kendt, bliver ligningen som leverer dem

$$(u-p)(u-q)(u-r)(u+p)(u+q)(u+r) = 0$$

eller ved at kombinere dem to og to med hinandens negative, vil vi have

$$(uu-pp)(uu-qq)(uu-rr) = 0,$$

hvilket giver en ligning af sjette grad, hvor alle ulige potenser af u mangler, helt som vi fandt i beviset for sætningen.

Men jeg bemærker videre, at det sidste konstant led i denne ligning bliver $= -pp \cdot -qq \cdot -rr = -ppqqrr$, hvilket altså er et kvadrat med fortegnet $-$ som er essentiel negativ. Heraf følger, at denne ligning nødvendigvis vil have mindst to reelle rødder, og hvis en af dem tages for u vil det give en reel dobbeltfaktor i den angivne ligning. Her er altså et andet bevis for den angivne sætning, af hvilke lignende vil blive givet for de efterfølgende sætninger.

Men man vil uden tvivl stadig indvende overfor mig, at jeg her antager, at størrelsen pqr er en reel størrelse og at dets kvadrat $ppqqrr$ er positiv; hvilket stadig er tvivlsom, eftersom rødderne a, b, c, d vil kunne være imaginære, kan det godt ske, at kvadratet på størrelsen pqr som er sammensat af disse, kunne være negativ. Men jeg svarer på dette, at dette tilfælde kan aldrig indtræffe; uanset hvilke imaginære tal der er rødderne a, b, c, d, vides at der skal gælde

$$\begin{gathered} a+b+c+d = 0, \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd = B, \\ abc+abd+acd+bcd = -C, \\ abcd = D, \end{gathered}$$

og størrelserne B, C, D er reelle. Men idet $p = a+b, q = a+c, r = a+d$, er deres produkt

$$pqr = (a+b)(a+c)(a+d)$$

bestemt, som det vides, af størrelserne B, C, D, og bliver dermed reel; alt hvad vi har set er at $pqr = -C$ og $ppqqrr = CC$. Man indser let det samme, at i de meget højere ligninger vil det samme finde sted og at man ikke vil kunne have indvendinger fra denne side mod de følgende beviser.

SÆTNING 5

34. *Enhver ligning af ottende grad kan altid opløses i to reelle faktorer af fjerde grad.*

Beviset kører analogt med fjerdegradstilfældet. Først elimineres leddet med x^7 ved en substitution, og det antages at ligningen er opsplittet i de to faktorer $x^4 - ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ og $x^4 + ux^3 + \delta x^2 + \epsilon x + \zeta = 0$. Da u kan udtrykkes som summen af fire rødder i ottendegradsligningen, kan den antage op til

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

forskellige værdier, og den vil være rod i en ligning af formen

$$(uu - pp)(uu - qq)(uu - rr)(uu - ss) \cdots = 0$$

med 35 faktorer, hvori konstantleddet er negativt. Derfor kan u vælges reelt. Euler påstår endvidere, at så bliver også $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ reelle og han forsøger at give lidt argumentation herfor. Det var dette sted, som blev angrebet af senere forfattere.

Den efterfølgende sætning 6 giver det analoge resultat om ligninger af 16. grad. Endelig vender Euler sig mod det generelle tilfælde med et analogt bevis.

SÆTNING 7

45. *Enhver ligning af en grad som kan udtrykkes som en binær potens som* 2^n *(hvor* n *er et helt tal større end* 1*) kan opløses i to reelle faktorer af grad* 2^{n-1}*.*
[...]

KOROLLAR 1

46. Altså er enhver ligning af 32. grad opløselig i to reelle faktorer af 16. grad og ved anvendelse af den foregående sætning videre opløselig i 16 reelle faktorer af anden grad. Dette gælder også alle ligninger af lavere grad end 32, som man på denne måde vil kunne opløse i reelle faktorer, enten simple eller dobbelte.
[...]

SKOLIUM

49. Hermed haves altså et fuldstændigt bevis for sætningen, som man sædvanligvis antager i analysen og især i integralregningen, hvori man påstår, at enhver rational funktion i én variabel x, som

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + etc.,$$

altid kan opløses i reelle faktorer, som enten er simple og på formen $x + p$ eller dobbelte og på formen $xx + px + q$. Det er muligheden for denne opløsning, som man anvender i den smukke og vigtige følge heraf, at integralet af enhver differentialform $\frac{Pdx}{Q}$, hvor P og Q er rationale funktioner af x, altid lader sig udtrykkke enten algebraisk eller ved hjælp af logaritmer eller ved hjælp af cirkelbuer.

Men hvis man betragter styrken af beviset, som jeg har givet om denne smukke egenskab ved ligningerne, tror jeg intet man vil kunne finde at indvende, efter at man grundig har overvejet bemærkningerne som jeg her har tilføjet; imidlertid i tilfælde af, at man har vanskeligheder ved at anerkende velgerningerne i disse beviser, har jeg tilføjet nogle sætninger om emnet, som ikke er afhængige af det foregående og hvis sandhed vil hjælpe med at fjerne alt tvivl som stadig måtte være tilbage.

Tekst 29: Gauss om regulære polygoner

I sit berømte værk *Disquisitiones Arithmeticae* fra 1801 brugte Gauss sine resultater om regning med heltal modulo n på at løse det antikke konstruktionsproblem: Hvilke regulære polygoner kan konstrueres med passer og lineal? Hans svar kan sammenfattes således: Den regulære n-kant kan konstrueres med passer og lineal hvis n er af formen $n = 2^\alpha p_1 p_2 \dots p_k$, hvor $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ og $p_1, p_2, \dots, p_k$ er forskellige Fermat-primtal, dvs. primtal af formen $2^{2^\nu} + 1$. Gauss skriver også korrekt at den regulære n-kant kun kan konstrueres hvis n er af denne form, men han medtager ikke beviset herfor.

Nedenfor er gengivet en dansk oversættelse af begyndelsen af Gauss' argument samt slutningen efter den engelske oversættelse i [Fauvel & Gray 1987, p. 493].

a) Hvordan hænger løsning af ligningen $x^n - 1$ sammen med det omtalte konstruktionsproblem?

b) Argumentér for at man altid kan konstruere rødderne i et andengradspolynomium med passer og lineal (se tekst 20).

c) Gengiv første del af Gauss' bevis i alle detaljer.

d) Læs sidste del af Gauss' bevis og gennemfør detaljerne i beviset for at hvis $2^m + 1$ er et primtal så er m en toerpotens.

   Det kan bemærkes at det endnu er uvidst om der findes flere Fermat-primtal end de af Gauss nævnte.

§339

Ligningen $x^n - 1 = 0$ (hvor man altid skal tænke sig til forudsætningen at n er et ulige primtal) har kun en enkelt reel rod, $x = 1$. De øvrige $n - 1$ rødder, som er omfattet af ligningen

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$$

er alle imaginære. Samlingen af disse vil vi betegne med Ω og funktionen

$$x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1$$

med X. Når r således er en hvilkensomhelst af rødderne fra Ω så er $1 = r^n = r^{2n}$ osv. og generelt $r^{en} = 1$ for enhver hel, positiv eller negativ værdi af e. Heraf ses, at når λ, μ er hele tal, der er kongruente modulo n, så er $r^\lambda = r^\mu$. Er derimod λ, μ inkongruente modulo n så er r^λ og r^μ forskellige; thi i dette tilfælde kan man finde et helt tal ν således at $(\lambda - \mu)\nu \equiv 1 \pmod{n}$, hvoraf det følger at $r^{(\lambda-\mu)\nu} = r$, så $r^{(\lambda-\mu)}$ med sikkerhed ikke kan være lig 1. Desuden er det klart at enhver potens af r ligeledes er en rod i ligningen $x^n - 1 = 0$. Da størrelserne $1(= r^0), r, r^2, \ldots, r^{n-1}$ alle er forskellige, udgør disse størrelser altså samtlige rødder i ligningen $x^n - 1 = 0$ og dermed er rødderne $r, r^2, \ldots, r^{n-1}$ identisk med Ω.
[...]

§365

Thus by the preceding discussions we have reduced the division of the circle into n parts, if n is a prime number, to the solution of as many equations as there are factors in the number $n - 1$. The degree of the equations is determined by the size of the factors. Whenever therefore $n - 1$ is a power of the number 2, which happens when the value of n is 3, 5, 17, 257, 65537, etc. the sectioning of the circle is reduced to quadratic equations only, and the trigonometric functions of the angles P/n, $2P/n$, etc. can be expressed by square roots which are more or less complicated (according to the size of n). Thus in these cases the division of the circle into n parts or the inscription of a regular polygon of n sides can be accomplished by geometric constructions. Thus, e.g., for $n = 17$, by articles 354, 361 we get the following expression for the cosine of the angle $P/17$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{[34 - 2\sqrt{17}]} \\ + \frac{1}{8}\sqrt{[17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} - 2\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}]} \end{aligned}$$

The cosine of multiples of this angle will have a similar form, but the sine will have one more radical sign. It is certainly astonishing that although the geometric divisibility of the circle into three and five parts was already known in Euclid's time, nothing was added to this discovery for 2000 years. And all geometers had asserted that, except for those sections and the ones that derive directly from them (that is, division into 15, $3 \cdot 2^\mu$, $5 \cdot 2^\mu$, and 2^μ parts), there are no others that can be effected by geometric constructions. But it is easy to show that if the prime number $n = 2^m + 1$, the exponent m can have no other prime factors except 2, and so it is equal to 1 or 2 or a higher power of the number 2. For if m were divisible by any odd number ζ (greater than unity) so that $m = \zeta\eta$, then $2^m + 1$ would be divisible by $2^\eta + 1$ and so necessarily composite. All values of n, therefore, that can be reduced to quadratic equations, are contained in the form $2^{2^v} + 1$. Thus five numbers 3, 5, 17, 257, 65537 result from letting $v = 0, 1, 2, 3, 4$ or $m = 1, 2, 4, 8, 16$. But the geometric division of the circle cannot be accomplished for *all* numbers contained in the formula but only for those that are prime. Fermat was misled by his induction and affirmed that all numbers contained in this form are necessarily prime, but the distinguished Euler first noticed that this rule is erroneous for $v = 5$ or $m = 32$, since the number $2^{32} + 1 = 4294967297$ involves the factor 641.

Whenever $n - 1$ implies prime factors other than 2, we are always led to equations of higher degree, namely, to one or more cubic equations when 3 appears once or several times among the prime factors for $n - 1$, to equations of the fifth degree when $n - 1$ is divisible by 5, etc. *We can show with all rigour that these higher-degree equations cannot be avoided in any way nor can they be reduced to lower-degree equations.* The limits of the present work exclude this demonstration here, but we issue this warning lest anyone attempt to achieve geometric constructions ofr sections other than the ones suggested by our theory (e.g. sections into 7, 11, 13, 19, etc. parts) and so spend his time uselessly.

Tekst 30: Fourier om trigonometriske rækker

I sit arbejde om varmelære, *Théorie analytique de la chaleur* (publiceret i 1822), opstillede Fourier varmeledningsligningen, dvs. den partielle differentialligning for temperaturen $v(x, y, z, t)$ i punktet (x, y, z) til tiden t givet ved

$$K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial v}{\partial t},$$

hvor K er den indre varmeledningskoefficient, der i almindelighed afhænger af (x, y, z) og t. Fourier løste derefter ligningen i en række specialtilfælde. Det første sådanne tilfælde var at bestemme temperaturfordelingen i en uendelig (homogen) halvplade, hvor varmefordelingen er i ligevægt. Varmeledningsligningen bliver i dette tilfælde

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

og dertil kommer passende randbetingelser. Ved løsningen af ligningen udviklede Fourier løsningen i en uendelig trigonometrisk række. Det førte ham frem til overvejelserne, der er gengivet nedenfor i oversættelse fra [Fourier 1822, pp. 167–79]. Det var den første udvikling af en funktion i dens Fourierrække i værket. Længere henne i værket påstår Fourier, at enhver funktion kan udvikles på denne måde.

a) Gennemgå Fouriers bestemmelse af koefficienterne i

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \dots.$$

Er du tilfreds med hans argumentation? Hvordan ville du gribe problemet an, hvis du skulle løse det?

b) Tegn den kurve som Fourier mener ligningen

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \dots$$

giver anledning til. Hvad er grafen for *funktionen* y moderne set? Diskuter Fouriers argumenter for at kurven bliver den nævnte.

Kapitel III — En uendelig rektangulær plade

Afsnit II.

Det første eksempel på brugen af trigonometriske rækker i varmeteorien.

171.

Vi vil nu igen betragte ligningen

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \dots,$$

i hvilken det er nødvendigt at bestemme koefficienterne $a, b, c, d, \dots$. For at denne ligning skal være gyldig er det nødvendigt at konstanterne tilfredsstiller ligningerne som fremkommer ved successivt differentiation, hvilket giver følgende resultater

$$\begin{aligned}
1 &= a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + \dots,\\
0 &= a\sin y + 3b\sin 3y + 5c\sin 5y + 7d\sin 7y + \dots,\\
0 &= a\cos y + 3^2 b\cos 3y + 5^2 c\cos 5y + 7^2 d\cos 7y + \dots,\\
0 &= a\sin y + 3^3 b\sin 3y + 5^3 c\sin 5y + 7^3 d\sin 7y + \dots,
\end{aligned}$$

og så videre i det uendelige.

Indsættes $y = 0$ i ligningerne ovenfor, fås

$$\begin{aligned}
1 &= a + b + c + d + e + f + g + \dots,\\
0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + \dots,\\
0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + \dots,\\
0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \dots,\\
0 &= a + 3^8 b + 5^8 c + \dots,\\
&\dots
\end{aligned}$$

Antallet af ligninger er uendeligt ligesom de ubekendte $a, b, c, d, e, \dots$. Problemet består i at eliminere alle ubekendte undtagen en enkelt.

172.

For at danne sig en klar idé om resultatet af denne elimination, vil vi først antage at antallet af ubekendte tal $a, b, c, d, \ldots$ er endeligt og lig m. Vi vil kun anvende de m første ligninger med alle led der indeholder ubekendte udover de m første fjernet. Hvis vi successivt sætter $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$, osv., vil vi finde værdierne af de ubekendte under hver af disse antagelser. Størrelsen a, for eksempel, får én værdi i tilfældet med to ubekendte, en anden i tilfældet med tre ubekendte, og en tredje i tilfældet med fire ubekendte og på lignende måde for ethvert større antal. Det samme gælder for den ubekendte b, som får forskellige værdier for hver gang vi udfører eliminationen; alle de andre ubestemte får på lignende måde en uendelighed af forskellige værdier. Men værdien af en ubekendt, i tilfældet hvor antallet er uendeligt, er grænsen mod hvilken værdierne fra de successive eliminationer nærmer sig. Det drejer sig om at undersøge om ikke hver af værdierne $a, b, c, d, \ldots$ konvergere mod en endelig grænse, hvortil de nærmer sig kontinuert, efterhånden som antallet af ubekendte forøges.

Antag at vi bruger følgende syv ligninger:

$$
\begin{aligned}
1 &= a + b + c + d + e + f + g,\\
0 &= a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + 13^2 g,\\
0 &= a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + 11^4 f + 13^4 g,\\
0 &= a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + 9^6 e + 11^6 f + 13^6 g,\\
0 &= a + 3^8 b + 5^8 c + 7^8 d + 9^8 e + 11^8 f + 13^8 g,\\
0 &= a + 3^{10} b + 5^{10} c + 7^{10} d + 9^{10} e + 11^{10} f + 13^{10} g,\\
0 &= a + 3^{12} b + 5^{12} c + 7^{12} d + 9^{12} e + 11^{12} f + 13^{12} g,
\end{aligned}
$$

De seks ligninger som ikke længere indeholder g er:

$$
\begin{aligned}
13^2 &= a(13^2 - 1^2) + b(13^2 - 3^2) + c(13^2 - 5^2) +\\
&\quad d(13^2 - 7^2) + e(13^2 - 9^2) + f(13^2 - 11^2),\\
0 &= a(13^2 - 1^2) + 3^2 b(13^2 - 3^2) + 5^2 c(13^2 - 5^2) +\\
&\quad 7^2 d(13^2 - 7^2) + 9^2 e(13^2 - 9^2) + 11^2 f(13^2 - 11^2),\\
0 &= a(13^2 - 1^2) + 3^4 b(13^2 - 3^2) + 5^4 c(13^2 - 5^2) +\\
&\quad 7^4 d(13^2 - 7^2) + 9^4 e(13^2 - 9^2) + 11^4 f(13^2 - 11^2),\\
0 &= a(13^2 - 1^2) + 3^6 b(13^2 - 3^2) + 5^6 c(13^2 - 5^2) +\\
&\quad 7^6 d(13^2 - 7^2) + 9^6 e(13^2 - 9^2) + 11^6 f(13^2 - 11^2),\\
0 &= a(13^2 - 1^2) + 3^8 b(13^2 - 3^2) + 5^8 c(13^2 - 5^2) +\\
&\quad 7^8 d(13^2 - 7^2) + 9^8 e(13^2 - 9^2) + 11^8 f(13^2 - 11^2),\\
0 &= a(13^2 - 1^2) + 3^{10} b(13^2 - 3^2) + 5^{10} c(13^2 - 5^2) +\\
&\quad 7^{10} d(13^2 - 7^2) + 9^{10} e(13^2 - 9^2) + 11^{10} f(13^2 - 11^2),
\end{aligned}
$$

Fortsættes eliminationen får man til sidst en ligning i a, som er

$$a(13^2-1^2)(11^2-1^2)(9^2-1^2)(7^2-1^2)(5^2-1^2)(3^2-1^2) =$$
$$13^2 \cdot 11^2 \cdot 9^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2.$$

173.

Hvis man havde benyttet et antal ligninger der var én større for at bestemme a, ville man have fundet en ligning analog til den foregående med en faktor mere i det første produkt, nemlig: 15^2-1^2, og i det andet produkt 15^2 som en ny faktor. Loven, som de forskellige værdier af a er underkastet, er klar, og heraf følger at værdien af a som svarer til uendelig mange ligninger kan udtrykkes som

$$a = \frac{3^2}{3^2-1}\,\frac{5^2}{5^2-1}\,\frac{7^2}{7^2-1}\,\frac{9^2}{9^2-1}\,\frac{11^2}{11^2-1}\,\frac{13^2}{13^2-1}\cdots$$

eller

$$a = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\,\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\,\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\,\frac{11\cdot 11}{10\cdot 12}\,\frac{13\cdot 13}{12\cdot 14}\cdots.$$

Men dette sidste udtryk er kendt og, ifølge en sætning af Wallis, kan vi konkludere at

$$a = \frac{4}{\pi}.$$

Det drejer sig nu kun om at bestemme værdierne af de andre ubekendte.

Og det gør Fourier så på de følgende sider ved først at skære af til 6 ligninger med 6 ubekendte og bestemme b, c, d, e og f, for derefter at "gætte" løsningerne for systemet af uendelig mange ligninger med uendelig mange ubekendte. Han når frem til konklusionen:

$$a = 2\frac{2}{\pi},\quad b = -2\frac{2}{3\pi},\quad c = 2\frac{2}{5\pi},\quad d = -2\frac{2}{7\pi},\ldots$$

177.

Det er således, at vi får udført en fuldstændig elimination og bestemt koefficienterne a, b, c, d, $\ldots$ i ligningen

$$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + d\cos 7y + e\cos 9y\ldots.$$

Indsættelsen af koefficienterne i ligningen giver følgende

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \frac{1}{5}\cos 5y - \frac{1}{7}\cos 7y + \frac{1}{9}\cos 9y - \frac{1}{11}\cos 11y + \ldots.$$

Højresiden er en funktion af y som ikke ændrer værdi, når man tildeler den variable y værdier mellem $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$. Det er let at bevise, at denne række altid er konvergent; dvs. når vi tildeler y en eller anden værdi og fortsætter udregningen af koefficienterne, nærmer vi os mere og mere en fast værdi; således at differensen mellem denne værdi og summen af de beregnede led bliver mindre end enhver på forhånd given størrelse. Uden at standse ved dette bevis, som læseren selv kan tilføje, vil vi bemærke at den faste værdi som kontinuert nærmes er $\frac{\pi}{4}$ når y tildeles en værdi mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$, men at den er $-\frac{\pi}{4}$ når y ligger mellem $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{3\pi}{2}$; thi i det andet interval skifter hvert led i rækken fortegn. Generelt er grænsen af rækken skiftevis positiv og negativ; til sidst, konvergensen er ikke tilstrækkelig hurtig til at give en god approximation, men den er tilstrækkelig til at tilfredsstille ligningen.

178.

Ligningen

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \dots$$

hører til en retliniet kurve som, hvis x er abscisse og y ordinat, er sammensat af adskilte rette linier som alle er parallelle med aksen og [hvis længder er] lig en halv cirkelperiferi. Disse parallelle linier er placeret skiftevis over og under aksen i afstanden $\frac{\pi}{4}$, og forbundet med vinkelrette linier som selv udgør en del af kurven. For at give en eksakt idé om naturen af denne kurve, er det nødvendigt at antage at antallet af led i funktionen

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots$$

først forbliver under en bestemt værdi. I dette tilfælde, vil ligningen

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots$$

høre til en kurve som skiftevis er over og under aksen og skærer denne hver gang abscissen x bliver lig en af størrelserne

$$\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ \dots;$$

efterhånden som antallet af led i ligningen forøges, vil kurven det drejer sig om, mere og mere nærme sig den retliniede kurve beskrevet ovenfor bestående af parallelle linier og linier vinkelrette herpå, i den forstand at denne retliniede kurve er grænsen af de forskellige kurver som man får ved successivt at lade antallet af led vokse.

AFSNIT III.

Bemærkninger om rækkerne.

179.

Man kan betragte de samme ligninger under en anden synsvinkel og direkte bevise ligningen

$$\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{9}\cos 9x - \ldots.$$

Tilfældet hvor x er nul er verificeret af Leibnitz' række

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.$$

Dernæst antager vi at antallet af led i rækken

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots,$$

i stedet for at være uendelig, er bestemt og lig m. Vi vil betragte værdien af denne række som en funktion af x og af m. Vi vil reducere funktionens værdi til en sædvanlig række af negative potenser af m; og vi vil derved indse at denne værdi nærmer sig noget der er konstant og uafhængig af x, når m er et meget stort tal.

Fourier viser dernæst ved direkte udregning, at

$$\begin{aligned} y &= \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots - \frac{1}{2m-1}\cos(2m-1)x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2mx}{\cos x}\,dx \\ &= \text{konstant} - \frac{1}{2\cdot 2m}\cos 2m\,\text{sec}x + \frac{1}{2\cdot 2^2 m^2}\sin 2mx\,\text{sec}'x + \ldots \end{aligned}$$

som bevis for den nævnte konklusion.

Tekst 31: Cauchy om rækker

Cauchy publicerede sin "stringente" teori for uendelige rækker i kapitel VI af lærebogen *Cours d'analyse* i 1821. Nedenfor er gengivet en oversættelse til dansk af begyndelsen og slutningen af det første afsnit i dette kapitel [Cauchy 1821, pp. 123–26 & 130–32].

a) Hvilken indstilling har Cauchy til divergente rækker? Hvordan harmonerede det med opfattelsen i 1700-tallet?

b) Cauchy giver flere ækvivalente betingelser for at en række konvergerer. Gengiv dem. Diskuter Cauchys argumenter og beviser for ækvivalenserne.

c) Sætning I til sidst har været meget omdiskuteret. Forsøg at oversætte den til moderne matematik. Gælder resultatet? Se evt. diskussionen i [Katz 1993, pp. 645–46; 1998, p. 715] og Cauchys originale formulering på fransk, der er medtaget til sidst.

Kapitel VI

Konvergente og divergente rækker. Regler for konvergens af rækker. Summation af nogle konvergente rækker.

§.1. *Generelle betragtninger om rækker.*

En uendelig følge af størrelser

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \&c.$$

som følger efter hinanden efter en bestemt lov kaldes en *række.*[1] Størrelserne selv er de forskellige *led* i rækken som betragtes. Lad

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

være summen af de n første led, hvor n betegner et eller andet helt tal. Hvis [afsnits]summen s_n nærmer sig vilkårlig godt en bestemt grænse s når værdien af n fortsat vokser, da siges rækken at være *konvergent*, og den nævnte grænse kaldes rækkens *sum.* Hvis derimod summen s_n ikke nærmer sig en eller anden fast grænse, når n vokser ubegrænset er rækken *divergent* og den har ingen sum. I begge tilfælde kaldes leddet som svarer til index n, altså u_n, for det *generelle led.* Det er tilstrækkeligt at angive dette generelle led som en funktion af index n for at rækken er fuldstændig bestemt.

En af de simpleste rækker er den geometriske progression

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c.\ \ldots$$

hvis generelle led er x^n, dvs. n'te potensen af størrelsen x. Hvis man summerer de n første led af denne række, finder man

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

og, idet den numeriske værdi af brøken $\frac{x^n}{1-x}$ konvergerer mod grænsen nul for voksende værdier af n eller vokser ud over alle grænser, afhængig af om man

[1] Cauchy bruger ordet *série*; i moderne matematik vil man bruge betegnelsen *følge.*

antager at den numeriske værdi af x er mindre end eller større end enheden, må man konkludere, at under den første hypotese er progressionen

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c.\ \ldots$$

en konvergent række med summen $\frac{1}{1-x}$, mens den samme progression, under den anden hypotese, er en divergent række som ikke længere har en sum.

Efter principperne etableret ovenfor haves, at for at rækken

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_n,\ u_{n+1},\ \&c. \ldots \tag{1}$$

skal konvergere, er det nødvendigt og tilstrækkeligt at [afsnits]summen

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c. \ldots + u_{n-1}$$

konvergerer mod en fast grænse s, når værdien af n vokser; med andre ord, det er nødvendigt og tilstrækkeligt at for uendeligt store tal n afviger [afsnits]summerne

$$s_n,\ s_{n+1},\ s_{n+2},\ \&c. \ldots$$

fra grænsen s, og som følge heraf, fra hinanden, med en uendelig lille størrelse. Desuden er de successive differenser mellem den første sum s_n og hver af de følgende henholdsvis bestemt ved ligningerne

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= u_n, \\ s_{n+2} - s_n &= u_n + u_{n+1}, \\ s_{n+3} - s_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ &\&c. \ldots . \end{aligned}$$

Altså, for at rækken (1) skal konvergere, er det først nødvendigt at det generelle led u_n aftager i det uendelige,[2] når n vokser; men denne betingelse er ikke tilstrækkelig, og det må også gælde, at for voksende værdier af n, skal de forskellige summer

$$\begin{aligned} &u_n + u_{n+1}, \\ &u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \\ &\&c. \ldots . \end{aligned}$$

dvs. summen af størrelserne

$$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ \&c. \ldots$$

taget i et vilkårligt antal efter den første, altid vil afslutte med at have en værdi der numerisk er mindre end enhver på forhånd givet grænse. Omvendt, når disse forskellige betingelser er opfyldte, er konvergensen af rækken sikret.

[2]Cauchys udtryk er: "décroisse indéfiniment".

Der gives ikke yderligere argumentation. I stedet vender Cauchy sig mod nogle eksempler: den geometriske række, den harmoniske række og rækken $\sum 1/n!$. Afsnittet afsluttes med følgende:

Hvis rækken

$$u_0, \ u_1, \ u_2, \ u_3, \ \&\text{c.} \ldots$$

antages at konvergere, hvis man betegner dens sum med s og summen af de n første led med s_n, finder man

$$\begin{aligned} s &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ \&\text{c.} \ldots \\ &= s_n + u_n + u_{n+1} + \ \&\text{c.} \ldots, \end{aligned}$$

og derfor

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \ \&\text{c.} \ldots .$$

Af denne sidste ligning følger, at størrelserne

$$u_n, \ u_{n+1}, \ u_{n+2}, \ \&\text{c.} \ldots$$

danner en ny konvergent række hvis sum bliver lig $s - s_n$. Hvis man betegner denne sum med r_n vil man få

$$s = s_n + r_n;$$

og r_n bliver det som man kalder *resten* af rækken (1) efter det n'te led.

Antag leddene i rækken (1) er afhængige af den samme variabel x, denne række er konvergent, og dens forskellige led er kontinuerte funktioner af x i omegnen af en bestemt udvalgt værdi af denne variabel;

$$s_n, \ r_n \ \text{ og } \ s$$

er så tre funktioner af den variable x, hvoraf den første oplagt er kontinuert med hensyn til x i omegnen af den udvalgte bestemte værdi, hvorom der var tale. Med dette fastslået betragt tilvæksterne af disse tre funktioner, når man lader x vokse med en uendelig lille størrelse α. Tilvæksten af s_n bliver, for alle mulige værdier af n, en uendelig lille størrelse; og den [tilvæksten] af r_n vil blive ubetydelig på samme tid som r_n, hvis man tildeler n en meget stor værdi. Altså kan tilvæksten af funktionen s kun være en uendelig lille størrelse. Med denne bemærkning udleder man umiddelbart den følgende sætning.

SÆTNING I. *Når de forskellige led i rækken (1) er funktioner af den samme variabel x, og kontinuerte med hensyn til denne variabel i en omegn af en bestemt værdi hvori rækken er konvergent, da er summen s af rækken også, i omegnen af denne bestemt værdi, en kontinuert funktion af x.*

COURS D'ANALYSE.

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \ldots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable,

$$s_n, \quad r_n \quad \text{et} \quad s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Lorsque les différents termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x = -1$, $x = 1$;

Tekst 32: Abel om uendelige rækker

I 1826 var den unge norske matematiker Abel på uddannelsesrejse rundt i Europa. Hans første stop var Berlin, hvorfra han skrev nedenstående brev til sin matematiklærer Holmboe hjemme i Kristiania. Brevet er gengivet efter [Abel 1902, pp. 13–18]

a) Formuler den sætning om Taylorrækker, som Abel tilskriver Cauchy. Har Abel læst Cauchy omhyggeligt? Se eventuelt [Katz 1993, p. 638; 1998, p. 707].

b) Formuler i moderne terminologi den sætning Abel angiver som sit eksempel. Den kaldes ofte Abels sætning.

c) Kommenter Abels overvejelser om differentiation af uendelige rækker.

d) Kommenter rettelserne i fodnoterne til sidst i brevet. Disse er tilføjet af redaktøren.

e) Hvad synes du om at bruge breve som kilder til matematikkens historie?

VI. Abel til Holmboe

Den 16de Januar 1826.

Kjære Ven!

Efter mit Løfte til Dig da jeg reiste fra Christiania har du vel allerede for længe siden ventet Brev fra mig, og jeg maa derfor bede Dig om Undskyldning for at Du ikke faaer det førend nu. Aarsagen er at jeg ønskede ikke allene at fortælle Dig hvorledes det er gaat mig i min første Udflugt men ogsaa hvorledes det i det Hele tegner sig med min Udenlandsreise. Tillige ønskede jeg ogsaa at meddele Dig et og andet af mine Undersøgelser over flere interessante Materier med hvilke jeg har beskjæftiget mig. —

Efter detaljer om sit ophold i Berlin går Abel over til rækken

$$\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \dots$$

og den tilsvarende sinus-række. Efter at have givet formler for de første k led konkluderer han:

$$\sin mx + m\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\sin(m-4)x + \dots = 0$$

for alle Værdier af x som ere comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Naar m er compris entre -1 et $-\infty$ saa er begge Rækkerne divergente og have altsaa *ingen* Sum. Divergente Rækker ere i det Hele noget Fandensskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa. Man kan faae frem hvad man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer. Kan der tænkes noget skrækkelige[re] end at sige at

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$

hvor n er et heelt positivt Tal. Risum teneatis amici. Jeg har i det hele faaet Øjnene op paa en meget forbausende Maneer; thi naar man [undtager] de allersimpleste Tilfælde for Ex: de geometriske Rækker, saa gives der i hele Mathematiken næsten ikke en eneste uendelig Række, hvis Sum er bestemt paa en stræng Maade: med andre Ord det vigtigste af Mathematiken staaer uden Begrundelse. Det meeste er rigtigt; det er sandt, og det er overordentlig forunderligt. Jeg bestræber mig for at søge Grunden dertil. En overmaade interessant Opgave. — Jeg troer ikke Du skal kunne fremsætte for mig mange Sætninger hvori der forekommer uendelige Rækker, imod hvis Beviis jeg ikke skal kunne gjøre grundede Indvendinger. Gjør det, saa vil jeg svare Dig. — Selv Binominial[!]-Formelen er endnu ikke strængt beviist. — Jeg har fundet at man har

$$(1+x)^m = 1 + m\,x + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots$$

for alle Værdier af m naar x er mindre end 1. Naar x er lig $+1$ har man den samme Formel i det Tilfælde at m er > -1 men ikke ellers, og naar $x = -1$ finder ikke Formelen Sted undtagen naar m er positiv. For alle andre Værdier af x og m er Rækken $1 + mx +$ etc. divergent. Det Taylorske Theorem, Grundlaget for hele den høiere Mathematik er ligesaa slet begrundet. Kun eet eneste strængt Beviis har jeg fundet og det er af Cauchy i hans Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal. Han viser der at man har:

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha\varphi' x + \frac{\alpha^2}{2}\varphi'' x + \dots$$

saa ofte Rækken er convergente, (men man bruger den rask væk i alle Tilfælde). For at vise ved et alm. Exempel (sit venia verbo) hvor slet man raisonner[er] og hvor forsigtig man maa være vil jeg vælge følgende Exempel: — Saa langt var jeg kommen da Maschmann kom ind af Døren og da jeg længe har manglet Brev hjemme fra saa standsede jeg for at høre efter om han ikke havde noget til mig (Han er nemlig vor constante Brevdrager) men der var ikke noget. Derimod havde han selv faaet Brev og blandt andre Nyheder fortalte han ogsaa at Du min Ven var indstillet til at blive Lector i Rasmusens Sted. Modtag min oprig[tig]ste Gratulation, og vær forsikkret om at ingen af dine Venner glæder sig saameget derover som jeg. Du kan troe at jeg ofte har ønsket en Forandring i din Stilling: thi at være Lærer ved en Skole maae dog være noget forskrækkeligt for En, der som Du interesserer sig saameget for sin Videnskab. — Nu maa Du sandelig ogsaa see at faae Dig en Kjæreste ikke sandt. Jeg hører at Din Broder Provsten har faaet sig Een. Jeg kan ikke nægte det frapperede mig meget. — Hils ham meget fra mig og gratuleer ham am meisten. — Nu til mit Exempel igjen. Lad

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \text{etc.}$$

være en hvilkensomhelst uendelig Række saa veed Du at en meget brugelig Maade at summere denne Række paa er at søge Summen af følgende:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

og siden sætte $x = 1$ i Resultatet. Dette er vel rigtigt; men mig synes at man ikke kan antage det uden Beviis, thi fordi man beviser at

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

for alle Værdier af x som er mindre end 1, saa er det ikke derfor sagt at det samme finder Sted for $x = 1$. Det var meget mueligt at Rækken $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ nærmer sig en ganske anden Størrelse end $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ naar x nærmer sig mere og mere til 1. Dette er klart i det almindelige Tilfælde naar Rækken $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ er divergent thi da har den ingen Sum. Jeg har beviist at det er rigtigt naar Rækken er convergerende. Følgende Exempel viser hvor man kan bedrage sig. Det kan strængt bevises og man har for alle Værdier af x som ere mindre end π

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \text{etc.}$$

Deraf synes at følge at den samme Formel skulde finde Sted for $x = \pi$; men da vilde man faae ud

$$\pi = \sin \pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi + \frac{1}{3}\sin 3\pi - \text{etc.} = 0 \text{ (absurd).}^*$$

Man kan finde utallige saadanne Exempler. —

I det Hele Theorien af de uendelig[e] Rækker er hidentil meget slet begrundet. — Man anvender alle Operationer paa uendelige Rækker som om de vare endelige, men er dette tilladt. Vel neppe. — Hvor staaer det beviist at man faaer Differentialet af en uendelig Række ved at differentiere hvert Led? Det er let at anføre Exempler hvor dette ikke er rigtigt, f. Ex.:

$$x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots^\dagger$$

Differentieres saa faaer man

$$x = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \text{etc.}^\ddagger$$

Resultat, ganske falsk, thi denne Række er divergent. — Det samme gjælder om Multiplication, Division etc. af uendelige Rækker. — Jeg har begyndt at gjennemgaae de vigtigste Regler som ere gjældende (nu) i denne Henseende, og vise i

* π paa venstre side er aabenbart skrivfeil for $\frac{1}{2}\pi$.
† x paa venstre side skrivfeil for $\frac{1}{2}x$.
‡ x ligeledes skrivfeil for $\frac{1}{2}x$.

hvilke Tilfælde de ere rigtige eller ikke. — Det gaaer ganske godt og interesserer mig umaadelig. —

Jeg kommer formodentlig til at blive her i Berlin til Enden af Februar eller Marts, og reiser da over Leipzig og Halle til Göttingen (ikke for Gauss Skyld, thi han skal være utaalelig stolt men for Bibliothekets Skyld som skal være fortræffeligt). I Slutningen af Sommeren gaaer jeg til Paris. Jeg vilde ønske at jeg var hjemme, thi jeg længes forskrækkelig. *Skriv mig nu endelig et langt Brev til om Alskens Ting. Gjør det endelig saasnart Du har faaet mit Brev.* — I Morgen skal jeg paa Comødie og see Die schöne Müllerinn. Farvel og hils mine Bekjendtere.

Din Ven
N. H. Abel.

Tekst 33: Legendre om parallelpostulatet

I de forskellige udgaver af Legendres *Elemens de géometrie* gav forfatteren flere forskellige "beviser" for Euklids parallelpostulat. Fælles for alle beviserne er, at han i stedet prøver at bevise den hermed ækvivalente sætning: at vinkelsummen i en trekant er $180°$ eller lig to rette vinkler.

Som regel fører Legendre beviset indirekte. Først viser han korrekt, at man når til en modstrid ved at antage, at vinkelsummen i en trekant er større end to rette. Dernæst "viser" han, at antagelsen om en vinkelsum mindre end to rette fører til en modstrid, hvor fra han konkluderer, at vinkelsummen må være to rette.

Nedenfor er gengivet først (a) den anden del af et "modstridsbevis" og (b) et direkte bevis for at vinkelsummen i en retvinklet trekant er to rette. Begge er fra 4. udgaven af bogen fra 1802. Gengivelsen er fra den engelske oversættelse i [Fauvel & Gray 1987, pp. 520–21]. Figuren til det første bevis findes ikke i originalen.

Det bemærkes, at de 28 første sætninger i Euklids *Elementer*, Bog I vises uden brug af parallelpostulatet. Dette gælder altså også sætning 26, der efter [Eibe 1897–1912, Bog I–II, p. 37] lyder:

I.26.

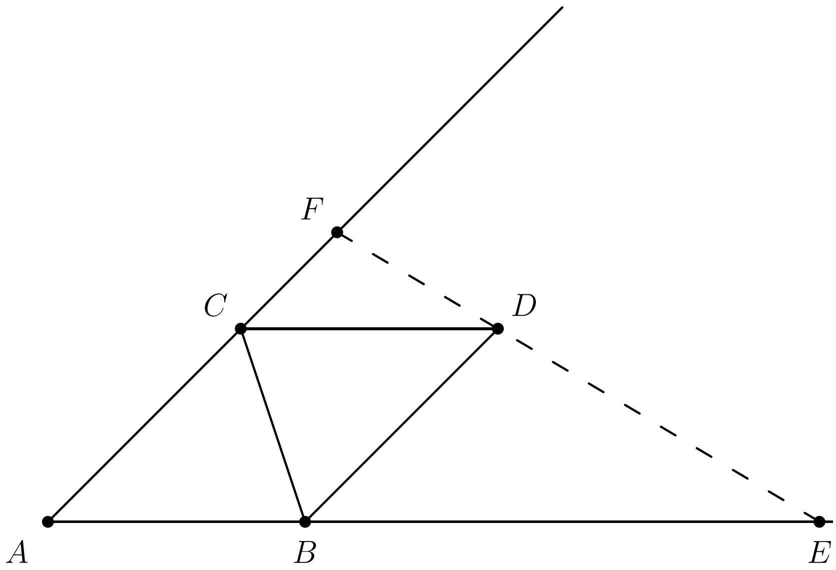
> *Naar to Trekanter have to Vinkler parvis ligestore og et Par Sider ligestore, enten dem, der ligge mellem de parvis ligestore Vinkler, eller dem, der ligge overfor et Par ligestore Vinkler, saa ville de ogsaa have de andre Sider parvis ligestore og det tredje Par Vinkler ligestore.*

a) I det første bevis antages, at vinkel A er trekantens mindste vinkel. Hvor bruger Legendre det? Kunne det antyde, at han var klar over, at der er noget muggent ved beviset? Find præcis, hvor Legendre begår en fejl.

b) Som et sideresultat i det første bevis opnår Legendre en kvalitativ sammenhæng mellem arealet og vinkelsummen i en trekant i ikke-Euklidisk geometri. Hvilken kvalitativ sammenhæng er det?

c) Peg på det sted, hvor Legendre laver en fejl i det andet bevis.

(a) Let ABC be the given triangle and suppose, if possible, that the sum of its angles is $= 2P - Z$, P denoting a right angle, and Z an arbitrary quantity, such that one supposes the sum of the angles to be less than two right angles.



Let A be the smallest angle of triangle ABC and on the opposite side make angle $BCD = ABC$, and angle $CBD = ACB$; the triangles BCD, ABC will be equal, as they have an equal side BC adjacent to two pairs of equal angles. Through the point D draw an arbitrary line EF which meets the extended sides of the angle A.

Since the sum of the angles of each triangle ABC, BCD is $2P - Z$ and that of each triangle EBD, DCF cannot exceed $2P$ [by Legendre's immediately preceding theorem] it follows that the sum of the angles of the four triangles ABC, BCD, EBD, DCF cannot exceed $4P - 2Z + 4P$ or $8P - 2Z$. If one removes the angles at B, C, D, which make $6P$, from this sum, since the sum of the angles at each of B, C, D is $2P$ the remainder will be equal to the sum of the angles of triangle AEF. Therefore the sum of the angles of triangle AEF cannot exceed $8P - 2Z - 6P$ or $2P - 2Z$.

So, while it is necessary to add Z to the sum of the angles of triangle ABC to make two right angles, it is necessary to add at least $2Z$ to the angles of the triangle AEF to make it likewise up to two right angles.

By means of triangle AEF one similarly constructs a third triangle such that one must add at least $4Z$ to the sum of its three angles to make the total equal to two right angles; and by means of the third one constructs a fourth, to which it is necessary to add at least $8Z$ to the sum of its angles to make the total equal to two right angles, and so on.

Now, however small Z is with respect to the right angle P, the sequence Z, $2Z$, $4Z$, $8Z$ etc, whose terms increase by doubling, eventually yields a term equal to or greater than $2P$. One is thereby led to a triangle to which it is necessary to add a quantity equal to or greater than $2P$ for the total to be only $2P$. This consequence is visibly absurd, therefore the hypothesis from which we began cannot be valid, i.e. it is impossible that the sum of the angles of triangle ABC can be smaller than two right angles.

(b) [The parallel] postulate has never hitherto been demonstrated in a way strictly geometrical, and independent of all considerations about infinity, a circumstance attributable, doubtless, to the importance of our common definition of a straight line, on which the whole of geometry hinges. But viewing the matter in a more abstract light, we are furnished by analysis with a very simple method of rigorously proving both this and the other fundamental properties of Geometry. We here propose to expound this method, with all the requisite minuteness, beginning with the theorem concerning the sum of the three angles of a triangle.

By superposition, it can be shown immediately, and without any preliminary propositions, that *two triangles are equal when they have two angles and an interadjacent side in each equal.* Let us call this side p, the two adjacent angles A and B, the third angle C. This third angle C therefore is entirely determined, when the angles A and B, with the side p are known; [...] hence the angle C must be a determinate function of the three quantities A, B, p, which I shall express thus, $C = \phi : (A, B, p)$.

Let the right angle be equal to unity, then the angles A, B, C will be numbers included between 0 and 2; and since $C = \phi : (A, B, p)$, I assert, that the line p cannot enter into the function ϕ. For we have already seen that C must be entirely determined by the given quantities A, B, p alone, without any other line or angle whatever. But the line p is heterogeneous with the other numbers A, B, C; and if there existed any equation between A, B, C, p the value of p must be found from it in terms of A, B, C; whence it would follow that p is equal to a number, which is absurd; hence p cannot enter into the function ϕ, and we have simply $C = \phi : (A, B)$. (Against this demonstration it has been objected that if it were applied word for word to spherical triangles, we should find that two angles being known, are sufficient to determine the third, which is not the case in that species of triangle. The answer is, that in spherical triangles, there exists one element more than in plane triangles, the radius of the sphere, namely, which must not be omitted from our reasoning. Let r be the radius; instead of $C = \phi(A, B, p)$ we shall now have $C = \phi(A, B, p, r)$ or by the law of homogeneity, simply $C = \phi(A, B, p/r)$. But since the raio p/r is a number, as well as A, B, C, there is nothing to hinder p/r from entering the function ϕ, and consequently we have no right to infer from it, that $C = \phi(A, B)$.)

This formula already proves that if two angles of one triangle are equal to two angles of another, the third angle of the former must also be equal to the third angle of the latter, and this granted, it is easy to arrive at the theorem we have in view.

First, let ABC be a triangle right angled at A, from the point A draw AD perpendicular to the hypoteneuse. The angles B and D of the triangle ABD are equal to the angles B and A of the triangle BAC; whence, from what has just been proved, the third angle BAD is equal to the third C. For a like reason the angle $DAC = B$, hence $BAD + DAC$ or $BAC = B + C$; but the angle BAC is right; hence *the two angles of a right angled triangle are together equal to a right angle.*

Tekst 34: Lobachevski om parallelle linier

I 1840 publicerede Lobachevski en lille bog på tysk med titlen *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, hvori han præsenterede hovedideerne i sin ikke-Euklidiske geometri. Begyndelsen af denne bog er gengivet nedenfor efter den danske oversættelse i [Wolff 1967, pp. 63–70].

a) Hvilke axiomer lægger Lobachevski til grund for geometrien?

b) Hvordan definerer han parallelle linier?

c) Formuler sætning 17 og 18 mere præcist end Lobachevski gør.

d) Gennemgå beviset for sætning 20. Find herunder et argument for at den firkant, der konstrueres med siderne p og q bliver et rektangel.

Nicolai Lobachevski

Teori for parallelle linier

I geometrien finder jeg visse ufuldkommenheder, som jeg anser for årsagen til, at denne videnskab — bortset fra sin overgang til analysen — endnu ikke har været i stand til at udvikle sig videre fra det stade, hvori den er blevet os overleveret af Euklid.

Til disse ufuldkommenheder regner jeg uklarheden i de grundlæggende geometriske begrebsdannelser samt i fremstillingen af de fremgangsmåder og metoder, der benyttes i målingen af geometriske størrelser, og endelig den afgørende mangel i parallelteorien, som matematikernes samlede anstrengelser indtil nu ikke har kunnet råde bod på.

Legendres bestræbelser har intet bidraget til denne teori, idet han blev t-vunget til at forlade den eneste farbare vej til fordel for et sidespor og tage sin tilflugt til hjælpesætninger, som han ganske ulogisk gjorde forsøg på at fremstille som nødvendige axiomer. Min første afhandling om geometriens grundlag offentliggjorde jeg i *Kazan-Kureren* i 1829. I det håb at kunne tilfredsstille alle forlangender tog jeg dernæst fat på en fuldstændig behandling af denne videnskab, og mine resultater offentliggjorde jeg i flere artikler i *Gelehrten Schriften der Universität Kazan* for årene 1836, 1837 og 1838 under fællestitlen "Nye elementer af geometrien, med en fuldstændig teori for parallelle linier". Omfanget af dette værk har muligvis hindret det i hos mine landsmænd at genopvække den interesse for emnet, som gik tabt efter Legendre. Jeg er imidlertid af den mening, at *Teori for parallelle linier* ikke har mistet sit krav på geometernes bevågenhed, og jeg agter derfor her at fremlægge hovedresultaterne af mine undersøgelser, idet jeg på forhånd bemærker, at jeg — i modsætning til Legendre — mener, at alle andre ufuldkommenheder, såsom definitionen af den rette linie, ikke kommer i betragtning i denne sammenhæng; de spiller slet ingen rolle i *Teori for parallelle linier*. For ikke at trætte min læser med det samlede kompleks af sætninger, som ikke er vanskelige at bevise, anfører jeg her kun de sætninger, der er nødvendige for det følgende.

1. En ret linie passer på sig selv i alle sine stillinger. Hermed mener jeg, at den rette linie ved en drejning af den flade, der indeholder den, ikke vil skifte stilling, dersom den går gennem to ubevægelige punkter i fladen (dvs. drejer vi flader, der indeholder linien, om to af liniens punkter, da vil linien ikke bevæge sig).

2. To rette linier kan ikke skære hinanden i to punkter.

3. En ret linie kan forlænges ubegrænset til begge sider; den deler således en begrænset plan i to dele.

4. To rette linier, der står vinkelret på samme tredie, vil aldrig skære hinanden, hvor langt de end forlænges.

5. En ret linie, der går fra den ene til den anden side af en anden ret linie, skærer denne (dvs. en ret linie, der har punkter på begge sider af en anden ret linie, vil altid skære denne).

6. Topvinkler, hvor den enes ben er forlængelserne af den andens, er lige store. Dette gælder for plane retliniede vinkler såvel som for vinklerne mellem plane flader (dvs. toplansvinkler).

7. To rette linier kan ikke skære hinanden, hvis en tredie skærer dem under samme vinkel.

8. I en retliniet trekant ligger lige store sider over for lige store vinkler og omvendt.

9. I en retliniet trekant ligger en større side over for en større vinkel. I en retvinklet trekant er hypotenusen større end enhver af de andre sider, og dens hosliggende vinkler er spidse.

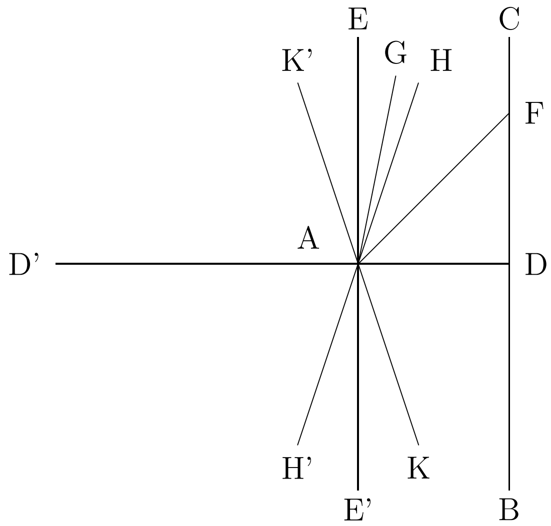
10. Retliniede trekanter er kongruente, hvis de har en side og to vinkler lige store, eller to sider og den mellemliggende vinkel lige store, eller to sider og vinklen over for den største lige store, eller tre sider lige store.

[...]

Herfra følger nu de resterende sætninger med tilhørende forklaringer og beviser.

16. Alle rette linier, der i samme plan går gennem samme punkt, kan i relation til en givet ret linie i samme plan deles i to klasser — i *skærende* og *ikke-skærende.*

Grænselinierne for den ene og den anden klasse af linier siges at være *parallelle med den givne linie.*



FIGUR 1

Lad der fra punktet A (fig. 1) være nedfældet den vinkelrette AD på linien BC, og lad AE være tegnet vinkelret på denne.

Inden for den rette vinkel EAD vil enten alle rette linier gennem A skære linien DC, som for eksempel AF, *eller også* vil nogen af dem, som den vinkelrette AE, ikke skære linien DC. I uvisheden om, hvorvidt den vinkelrette AE er den eneste linie, der ikke skærer DC, vil vi antage det for muligt, at der kan være andre linier som for eksempel AG, der ikke skærer DC, hvor langt de end forlænges. Idet vi passerer fra de skærende linier, som AF, til de ikke-skærende, som AG, vil vi træffe på en linie AH, en parallel til DC, en grænselinie, på hvis ene side alle linier AG er således beskafne, at de ikke skærer linien DC, hvorimod det for en vilkårlig linie AF på den anden side af denne grænselinie vil gælde, at den skærer linien DC.

Vinklen HAD mellem parallellen HA og den vinkelrette AD kaldes for parallelvinklen (parallelitetsvinklen), og for AD $= p$ vil vi her vedtage at betegne den $\Pi(p)$.

Er $\Pi(p)$ en ret vinkel, så vil forlængelsen AE' af den vinkelrette AE ligeledes være parallel med forlængelsen DB af linien DC; i tilknytning hertil skal det bemærkes, at det med hensyn til de fire rette vinkler, der i punktet A dannes af de vinklerette AE og AD samt deres forlængelser AE' og AD', for enhver ret linie, der udgår fra punktet A, vil gælde, at den enten selv eller i det mindste dens forlængelse ligger i det ene af de to rette vinkelrum, der vender mod BC, således at alle rette linier med undtagelse af parallellen EE' vil skære linien BC, når blot de forlænges tilstrækkeligt til begge sider.

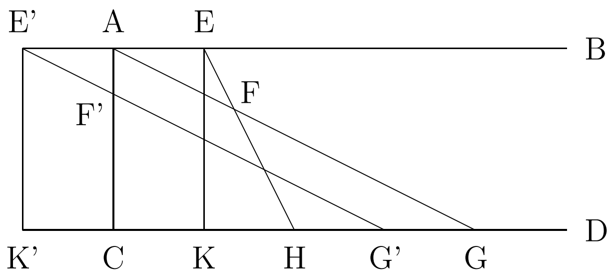
Er $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, vil der på den anden side af AD ligge en linie AK, som med AD danner samme vinkel DAK $= \Pi(p)$, og som også er parallel med forlængelsen DB af linien DC. Under denne antagelse bliver vi derfor tillige nødt til at skelne mellem *parallelitets-retninger.*

Alle resterende linier eller deres forlængesler inden for de to rette vinkelrum, der vender mod BC, vil høre til klassen af skærende linier, såfremt de ligger inden for vinklen HAK $= 2\,\Pi(p)$, som er vinklen mellem parallellerne; de vil derimod høre sammen med den ikke-skærende linie AG, hvis de ligger på de andre sider af parallellerne AH og AK: i de to vinkelrum EAH $= \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, og E'AK $= \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, mellem parallellerne og EE' den vinkelrette på AD. På den anden side af den vinkelrette EE' vil forlængelserne AH' og AK' af parallellerne AH og AK på tilsvarende måde ligeledes være parallelle med BC; de resterende linier vil i vinkelrummet K'AH' høre til klassen af skærende, i vinkelrummene K'AE, H'AE' til klassen af ikke-skærende linier.

Under antagelsen $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ kan linierne i overensstemmelse hermed kun være skærende eller parallel med BC; antager vi derimod $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, må vi tillade to paralleller, en på den ene og en på den anden side; endvidere må vi blandt de resterende linier skelne mellem ikke-skærende og skærende.

I begge antagelser er kendetegnet på parallelitet, at linien skærer ved den mindste afvigelse til den side, hvor parallellen ligger, således at hvis AH er parallel med DC, da vil enhver linie AF skære DC, hvor lille vinklen HAF så end måtte være.

17. *En parallel fastlægges som en sådan af ethvert af sine punkter.*



FIGUR 2

Givet AB (figur 2) parallel med CD, der har AC som vinkelret. Vi vil betragte to vilkårligt valgte punkter på linien AB og dens forlængelse ud over den vinkelrette.

Lad punktet E ligge på den side af den vinkelrette, hvor AB er tegnet parallel med CD.

Fra punktet E nedfældes den vinkelrette EK på CD, og EF tegnes, så at den falder inden for vinklen BEK.

Punkterne A og F forbindes med en ret linie, hvis forlængelse må skære CD et eller andet sted i G (Sætning 16). Vi opnår på denne måde en trekant ACG, som linien EF skærer ind i; da sidstnævnte ifølge sin konstruktion ikke kan skære AC og helle ikke AG og EK en gang til (Sætning 2), må den skære CD et eller andet sted i H (Sætning 3).

Lad nu E' være et punkt på forlængelsen af AB, og lad E'K' være vinkelret på forlængelsen af linien CD; tegn linien E'F', så at der dannes en så lille vinkel AE'F', at den skærer AC et sted i F'; tegn endvidere fra A linien AF, så at den danner den samme vinkel med AB; dens forlængelse skærer CD i G (Sætning 16).

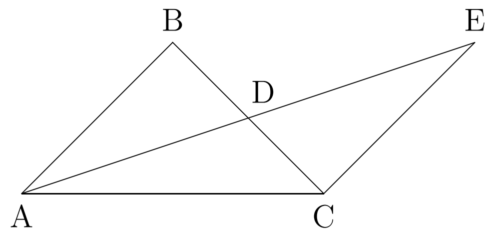
På denne måde fremkommer en trekant AGC, som forlængelsen af linien E'F' skærer igennem; da denne linie ikke kan skære AC en gang til og heller ikke kan skære AG, da vinkel BAG = BE'G' (Sætning 7), må den skære CD et eller andet sted i G'.

Altså vil linierne EF og E'F', ligegyldigt fra hvilke punkter E og E' de udgår, og ligegyldigt hvor lidt de afviger fra linien AB, altid skære CD, som AB er parallel med.

18. *Parallelitet er en gensidig egenskab.*

Lad AC være vinkelret på CD, der har AB som parallel. [...] altså er CD parallel med AB.

19. *I en retliniet trekant er summen af de tre vinkler aldrig større end to rette vinkler.*

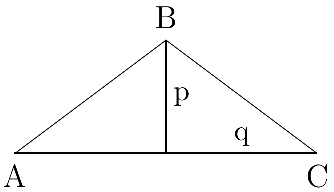


FIGUR 4

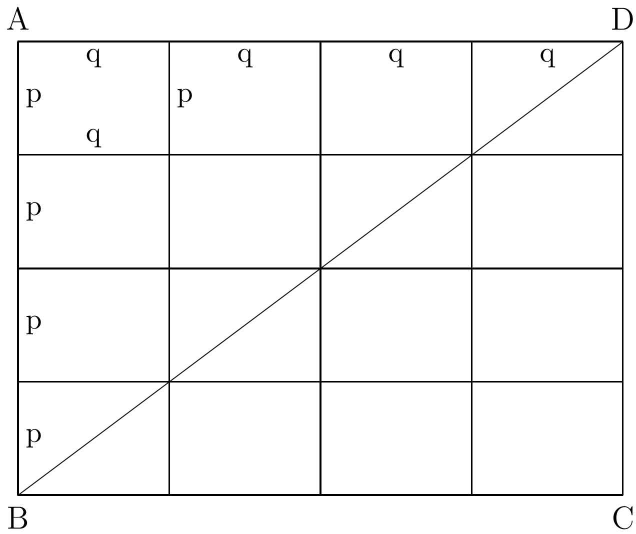
Lad os antage, at det for trekant ABC (figur 4) gælder, at summen af de tre vinkler er lig med $\pi + a$; dernæst vælges, idet siderne antages ulige store, den mindste BC, som halveres i D; fra A tegnes linien AD gennem D, og dens forlængelse DE gøres lig med AD; til sidst forbindes punktet E og punktet C med den rette linie EC. I de kongruente trekanter ADB og CDE er vinkel ABD = DCE og BAD = DEC (Sætning 6 og Sætning 10); heraf følger, at også i trekant ACE må summen af de tre vinkler være lig med $\pi + a$; men samtidig er den mindste vinkel BAC (Sætning 9) i trekant ABC ved overgangen til den ny trekant ACE blevet delt i to dele EAC og AEC. Ved fortsættelse af denne proces — gentagen halvering af den side, der ligger over for den mindste vinkel — må vi sluttelig nå til en trekant, hvor summen af de tre vinkler er $\pi + a$, og hvori der findes to vinkler, der begge i absolut størrelse er mindre end $\frac{1}{2}a$; da den tredie vinkel imidlertid ikke kan være større end π, må a enten være nul eller negativ.

20. *Findes der én retliniet trekant, hvor summen af vinklerne er lig med to rette vinkler, da gælder dette tillige for enhver anden trekant.*

Er summen af vinklerne i den retliniede trekant ABC (figur 5) lig med π, da er i det mindste to af dens vinkler A og C spidse. Fra den tredie vinkelspids B nedfældes den vinkelrette p på den modstående side AC. Den vinkelrette deler trekanten i to retvinklede trekanter, og i hver af disse må summen af de tre vinkler ligeledes være π, idet den ikke kan være større end π og ved forening af trekanterne ikke mindre end π.



FIGUR 5



FIGUR 6

På denne måde opnår vi en retvinklet trekant med de vinkelrette sider p og q og her ud af en firkant, hvis modstående sider er lige store, og hvis hosliggende sider p og q danner rette vinkler (figur 6).

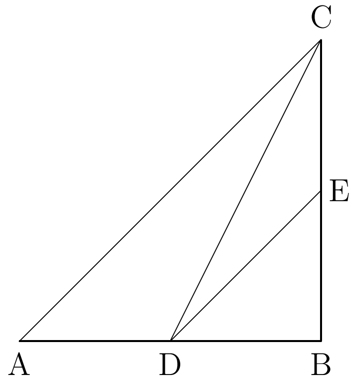
Ved gentagelse af denne firkant kan vi danne en ny med sider np og mq og sluttelig en firkant ABCD med sider, der står vinkelret på hinanden og er således beskafne, at AB $= np$, AD $= mq$, DC $= np$ og BC $= mq$, hvor m og n er vilkårlige hele tal. Denne firkant deles af diagonalen DB i to kongruente, retvinklede trekanter BAD og BCD, om hvilke det gælder, at summen af de tre vinkler er lig med π i dem begge.

Tallene n og m kan vælges tilstrækkeligt store til, at den retvinklede trekant ABC (figur 7) med de vinkelrette sider AB $= np$ og BC $= mq$ helt indeholder en givet retvinklet trekant DBE, når de rette vinkler bringes til dækning.

Tegnes linien DC, får vi retvinklede trekanter, der to og to efter hinanden har en side fælles.

Trekant ABC er dannet ved en forening af de to trekanter ACD og DCB, som hver for sig ikke kan have en vinkelsum, der er større end π; følgelig må den være lig med π, for at summen i den sammensatte trekant kan være lig med π.

På samme måde består trekant BDC af to trekanter DEC og DBE, og følgelig må summen af de tre vinkler i DBE være lig med π, og dette må i almindelighed



FIGUR 7

gælde for alle trekanter, da en vilkårlig trekant altid kan deles i to retvinklede trekanter.

Det følger heraf, at der kun er to tilladelige hypoteser: enten er i alle retliniede trekanter summen af de tre vinkler lig med π, eller også er summen i dem alle mindre end π.

[...]

Det følger, at det i alle retliniede trekanter gælder, at summen af de tre vinkler enten er π samtidig med, at parallel-vinklen $\Pi(p)$ for enhver linie p er lig med $\frac{1}{2}\pi$, eller også, at denne sum i alle trekanter er mindre end π samtidig med, at $\Pi(p)$ er mindre end $\frac{1}{2}\pi$.

Den første antagelse benyttes i *grundlaget for den sædvanlige geometri samt i den plane trigonometri.*

Den anden antagelse kan også opretholdes, uden at den fører til modstridende resultater, og med den grundlægges en ny geometrisk videnskab, som jeg har givet navnet *Imaginær geometri*, og som det her er min agt at udvikle så vidt som til de ligninger, der gælder mellem sider og vinkler i den retliniede såvel som den sfæriske trekant.

Tekst 35: Boole om logik

George Booles *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* fra 1854 var et af de tidligste forsøg på at opstille algebraiske regler for andet end tal. Nedenfor er gengivet udklip fra kapitel II og III efter oversættelsen til dansk i [Wolff 1967, pp. 229–52].

a) Hvad er formålet med teksten ifølge Boole?

b) Oversæt Booles begreber til moderne mængdeteori (eller udsagnslogik). Hvad svarer $\cdot$ og $+$ til? Læs omhyggeligt diskussionen, hvor $+$ indføres.

c) Hvad er motivationen for operationen $-$ og hvad svarer den til i moderne mængdeteori?

d) Hvorfor kan Boole ikke definere en operation svarende til division?

e) Boole lader efter Sætning II symbolet 0 betegne klassen "Nothing". Læs argumentet for Sætning IV og overvej bl.a. Booles fortolkning af symbolet 0 her.

f) Hvad synes du om Booles bevis for modsigelsesprincippet?

George Boole

En undersøgelse af tankens love, hvorpå er grundlagt de matematiske teorier for logik og sandsynlighedsregning

Kapitel II

Om tegn i almindelighed og om logikkens tegn i særdeleshed; også om de love, som denne klasse af tegn er underkastet.

1. Det er en almindeligt indrømmet sandhed, at sproget er et instrument for den menneskelige fornuft og ikke blot et medium for tankens udtrykkelse. Det er i dette kapitel hensigten at undersøge, hvad det er, der gør sproget så tjenligt for denne vor vigtigste åndsevne. På de forskellige trin af denne undersøgelse føres vi til at betragte sprogets opbygning opfattet som et formålsbestemt system; at undersøge dets enkelte grundbestanddele; at gøre forsøg på at afgøre disses indbyrdes forbindelser og afhængighed; samt at undersøge på hvilken måde disse bidrager til opnåelsen af det mål, de som sideordnede dele af et system har tilknytning til. [...]

6. Da vi nu har defineret et tegn som et arbitrært mærke, er det tilladeligt at erstatte alle tegn af den ovenfor beskrevne art med bogstaver. Lad os derfor vedtage at repræsentere klassen af elementer, hvortil der kan knyttes en bestemt betegnelse eller beskrivelse, med et enkelt bogstav, f. eks. x. Hvis betegnelsen således er "mennesker", vil vi lade x repræsentere "alle mennesker" eller klassen af mennesker. Med en klasse menes der sædvanligvis en samling af elementer, hvortil der kan knyttes en bestemt betegnelse eller beskrivelse, men i dette arbejde udvides betydningen af dette udtryk til også at omfatte det tilfælde, hvor der kun findes et eneste element, der passer til den forlangte betegnelse eller beskrivelse, samt de tilfælde, der angives med udtrykkene "Intet" og "Universet", der som klasser skal opfattes som bestående henholdsvis af "ingen ting" og "alle ting".

Hvis et adjektiv som "god" anvendes som et beskrivende udtryk, vil vi ligeledes lade et enkelt bogstav, f. eks. y, repræsentere alle de ting, om hvilke man kan benytte beskrivelsen "god", dvs. "alle gode ting" eller klassen af "gode ting". Lad os endvidere vedtage, at kombinationen xy skal repræsentere klassen af ting, om hvilke man på samme tid kan anvende de betegnelser eller beskrivelser, der er repræsenteret af x og y. Hvis x således står for "hvide ting" og y for "får", vil vi lade xy stå for "hvide får". På samme måde vil vi, hvis z står for "ting med horn", og x og y bibeholder deres foregående betydninger, lade zxy repræsentere "hvide får med horn", dvs. den samling ting, på hvilke betegnelsen "får" og beskrivelserne "hvide" og "med horn" samtidigt passer.

Lad os nu betragte de love, som symbolerne x, y etc. i ovennævnte forstand er underkastet.

7. For det første er det ifølge ovennævnte måde at kombinere på klart, at den rækkefølge, hvori to symboler er skrevet, er ligegyldig. Udtrykkene xy og yx repræsenterer begge klassen af ting, på hvis enkelte elementer betegnelserne eller beskrivelserne x og y begge passer. Vi har altså:

$$xy = yx. \tag{1}$$

I det tilfælde, hvor x repræsenterer hvide ting, og y får, vil begge sider af denne ligning repræsentere klassen af "hvide får". Der kan være forskel i den orden, hvori begrebsdannelsen udføres, men ingen i de enkelte ting, som den omfatter. [...]

Herefter bemærker Boole, at den kommutative lov også gælder ved tre eller flere symboler og formulerer den generelt som en lov (det er den, der henvises til i det følgende).

8. Til den ovenfor fastlagte lov kan vi føje følgende betragtninger, som alle mere eller mindre vil være af interesse i forbindelse med visse andre love, der senere udledes.

For det første bemærker jeg, at denne lov egentlig er en lov om tænkning og ikke en lov om ting. En forskel i rækkefølgen af en genstands egenskaber eller kendetegn er, når man helt ser bort fra ethvert spørgsmål om årsagsfølge, blot en forskel i begrebsdannelsen. Loven (1) udtrykker som en generel sandhed, at den samme begrebsdannelse kan foregå på forskellige måder, og formulerer naturen af denne forskel; mere udsiger den ikke.

[...]

For det tredie kan den lov, der er udtrykt i (1), karakteriseres ved at sige, at *bogstavsymbolerne x, y, z er kommutative ligesom algebraens symboler*. Hermed er det ikke sagt, at algebraens multiplikationsproces, hvis fundamentale lov kommer til udtryk i ligningen

$$xy = yx,$$

i sig selv har nogen analogi med den logiske kombinationsproces, men kun, at dersom den aritmetiske og logiske proces udtrykkes på samme måde, da vil deres symbolske udtryk være underkastet samme formelle lov. Grundlaget herfor er i de to tilfælde helt forskelligt.

9. Da kombinationen af to bogstavsymboler til formen xy udtrykker hele den klasse af genstande, hvorpå de betegnelser og egenskaber, der repræsenteres af x og y, samtidig passer, følger det, at hvis to symboler har nøjagtigt samme betydning, da vil deres kombination ikke udtrykke mere end ethvert af dem taget for sig. I et sådant tilfælde har vi altså:

$$xy = x.$$

Da y imidlertid blev antaget at have samme betydning som x, kan vi i ovenstående ligning erstatte det med x, og således får vi:

$$xx = x.$$

Nu betegnes kombinationen xx i den sædvanlige algebra med x^2. Lad os benytte det samme notationsprincip her; thi den måde, hvorpå en bestemt følge af tankeoperationer udføres, er lige så vilkårlig som den måde, hvorpå en enkelt idé eller operation udtrykkes (II.3). I overensstemmelse med denne notation tager ovenstående ligning formen:

$$x^2 = x, \tag{2}$$

og den er i virkeligheden udtryk for endnu en generel lov for de symboler, der benyttes til at repræsentere betegnelser, egenskaber eller beskrivelser.
[...]

10. Vi går nu over til at betragte endnu en klasse af sprogsymboler og de love, der gælder for deres anvendelse.

Klasse II

11. *Tegn for de tankemæssige operationer, ved hvis hjælp vi sammensætter dele til et hele og adskiller et hele i sine dele.*

Vi er ikke blot i stand til at nære forestillinger om genstande, således som de er karakteriseret ved betegnelser, egenskaber eller omstændigheder fælles for ethvert element i den betragtede gruppe, vi er tillige i stand til at danne os en helhedsforestilling om en gruppe af genstande bestående af enkelt-grupper, der hver for sig er betegnet og beskrevet. Hertil bruger vi konjunktionerne "og", "eller" etc. "Træer og mineraler", "golde bjerge eller frugtbare dale" er eksempler af denne slags. Når ordene "og", "eller" indskydes mellem de udtryk, der beskriver to eller flere klasser af genstande, er det udtrykkeligt underforstået, at disse klasser er helt adskilte, således at intet element i en af dem findes i en anden. I denne og i alle andre henseender er ordene "og", "eller" analoge med tegnet $+$ i algebraen, og deres love er identiske. Således er udtrykket "mænd og kvinder", når man ser bort fra konventioner, ensbetydende med udtrykket "kvinder og mænd". Lad x repræsentere "mænd" og y "kvinder", og lad $+$ stå for "og" og "eller"; vi har da

$$x + y = y + x \tag{3}$$

som er en ligning, der også gælder, hvis x og y repræsenterer *tal*, og $+$ er det aritmetiske additionstegn.

Lad symbolet z stå for adjektivet "europæisk"; vi har da, idet det jo er det samme at sige "europæiske mænd og kvinder" som at sige "europæiske mænd og europæiske kvinder":

$$z(x+y) = zx + zy, \tag{4}$$

og denne ligning ville ligeledes gælde, hvis x, y og z var symboler for tal, og hvis sammenstillingen af to bogstavsymboler betød deres algebraiske produkt, ligesom det i den tidligere givne logiske betydning repræsenterer klassen af genstande, til hvilken begge tillægsord i forening hører.

De ovenstående love er de love, der gælder for brugen af tegnet $+$, som her anvendes til at betegne den positive operation, der består i at samle dele til et hele. Men ideen om en operation, der udfører en positiv handling, synes at antyde en modsat rettet eller negativ operation, der ophæver virkningen af den førstnævnte. Vi kan således ikke betragte det som muligt at samle dele til et hele uden samtidig også at betragte det som muligt at adskille en del fra et hele. Denne operation udtrykker vi i dagligsproget med tegnet "undtagen" som i "alle mennesker undtagen asiater", "alle stater, undtagen dem, der har monarki". Det er her underforstået, at de ting, der undtages, er del af de ting, hvorfra de undtages. Da vi har udtrykt den samlende operation med tegnet $+$, kan vi udtrykke den ovenfor beskrevne operation med $-$ (minus). Repræsenterer x således "mennesker" og y "asiater", dvs. "asiatiske mennesker", så vil "alle mennesker untagen asiater" være udtrykt ved $x - y$. Og lader vi x repræsentere "stater" og y den beskrivende egenskab "der har monarki", så vil begrebsdannelsen "alle stater undtagen dem, der har monarki" være udtrykt ved $x - xy$.

Da det for de væsentlige formål med vor ræsonneren er ligegyldigt, om vi nævner undtagelserne først eller sidst, er det også ligegyldigt, i hvilken orden vi skriver en vilkårlig række led, hvoraf nogle er påvirket af tegnet $-$. Vi har altså som i den almindelige algebra,

$$x - y = -y + x. \tag{5}$$

Lad x fortsat repræsentere klassen "mennesker" og y "asiater", og lad z repræsentere adjektivet "hvid"; at bruge adjektivet "hvid" på den samling af mennesker, der er angivet ved sætningen "mennesker undtagen asiater", er det samme som at sige "hvide mennesker undtagen hvide asiater". Vi har følgelig

$$z(x-y) = zx - zy. \tag{6}$$

Dette er også i overensstemmelse med den sædvanlige algebra.

Ligningerne (4) og (6) kan betragtes som eksempler på en helt generel lov, som vi kan udtrykke ved at sige, at *bogstavsymbolerne x, y, z, etc. er distributive i deres operation.* [...]

Boole argumenterer derefter for, at der gælder, at hvis $x = y + z$ så er også

$$x - z = y$$

ligesom i den sædvanlige algebra. Dette opsummerer han i lovene:

1. Hvis ens ting lægges til ens ting, er helhederne ens.

2. Hvis ens ting tages fra ens ting, er resterne ens.

Det ses heraf, at vi kan addere eller subtrahere ligninger og anvende den ovenfor anførte regel for flytning af led ganske som i den sædvanlige algebra.

Endvidere: Hvis to klasser af ting x og y er identiske, dvs. hvis alle elementer i den ene er elementer i den anden og omvendt, da vil de elementer i den ene klasse, der har en givet egenskab z, være identiske med de elementer i den anden, der har den samme egenskab z. Har vi derfor følgende ligning

$$x = y;$$

vil vi, uanset hvilken klasse eller egenskab z repræsenterer, også have:

$$zx = zy.$$

Dette er formelt den samme som den algebraiske lov: Hvis begge sider i en ligning multipliceres med samme størrelse, da er produkterne lige store.

14. Her ser det imidlertid ud til, at analogien mellem det foreliggende system og algebraen, som den i almindelighed fremstilles, hører op. Antager vi, at det for elementerne i en klasse x, som har en vis egenskab z, gælder, at de er identiske med elementerne i en klasse y som har den samme egenskab z, følger det i almindelighed ikke, at elementerne i klassen x er identiske med elementerne i klassen y.

Ud fra ligningen

$$zx = zy$$

kan man altså ikke slutte, at ligningen

$$x = y$$

også er sand. Algebraikernes axiom om, at begge sider i en ligning kan divideres med samme størrelse, har med andre ord her ingen formel ækvivalent. [...]

Men en lille overvejelse vil vise, at dette axiom selv inden for den sædvanlige algebra ikke har den samme generalitet som de andre axiomer, vi har behandlet. Udledelsen af ligningen $x = y$ ud fra ligningen $zx = zy$ er kun gyldig, dersom det vides, at z ikke er lig med 0. Tillades værdien $z = 0$ i det algebraiske system, vil ovennævnte axiom ikke mere kunne anvendes, hvorved den tidligere eksemplificerede analogi i det mindste fortsat vil være ubrudt.

15. Det er imidlertid ikke med størrelsessymboler i almindelighed, at det er af betydning at opspore slægtskaber af denne art undtagen af rent spekulative grunde. Vi har set (II.9), at logikkens symboler er underkastet den specielle lov

$$x^2 = x.$$

Nu findes der kun to talsymboler, nemlig 0 og 1, der er underkastet den samme formelle lov. Vi ved, at $0^2 = 0$ og at $1^2 = 1$, og at ligningen $x^2 = x$ betragtet som algebraisk ligning ikke har andre rødder end 0 og 1. I stedet for alment at undersøge, hvor langt den formelle analogi mellem logikkens symboler og talsymbolerne kan føres, ligger det derfor umiddelbart nærmere at sammenligne dem med størrelsessymboler, *der kun kan antage værdierne* 0 *og* 1. Lad os da forestille os en algebra, hvor symbolerne x, y, z etc. kan antage værdierne 0 og 1 og kun disse værdier. Lovene, axiomerne og processerne i en sådan algebra vil i hele deres udstrækning være identiske med lovene, axiomerne og processerne i en logisk algebra. Kun i fortolkningen vil de adskille sig. Metoden for det følgende i dette arbejde hviler på dette princip.
[. . .]

Kapitel III

Sætning II

13. *Om bestemmelsen af den logiske værdi og betydning af symbolerne* 0 *og* 1.
Symbolet 0 tilfredsstiller, som det bruges i algebraen, følgende formelle lov:

$$0 \times y = 0 \quad \text{eller} \quad 0y = 0, \tag{1}$$

uanset hvilket *tal* y repræsenterer. For at denne lov kan opretholdes i logikken, må vi til symbolet 0 knytte en fortolkning af en sådan art, at den *klasse*, der repræsenteres af $0y$, er identisk med den klasse, der repræsenteres af 0, uanset hvilken klasse y er. En nærmere overvejelse vil vise, at denne betingelse er opfyldt, hvis symbolet 0 repræsenterer Intet. I overensstemmelse med en tidligere definition kan vi kalde Intet en klasse. Intet og Universet er jo de to ydergrænser for klasser; thi de er grænserne for de mulige fortolkninger af navne i almindelighed, af hvilke ingen kan være knyttet til færre individer, end der omfattes af Intet, eller til flere, end der omfattes af Universet. Ligegyldigt hvilken klasse y er, så er de elementer, der er fælles for den og klassen Intet, identiske med de elementer, der omfattes af klassen Intet; thi der er ingen af dem. Og altså er, dersom vi til 0 knytter fortolkningen Intet, loven (1) opfyldt, og på anden måde kan den ikke tilfredsstilles i overensstemmelse med den fuldstændig almene karakter af klassen y.

For det andet tilfredsstiller symboler 1 i talsystemet følgende lov:

$$1 \times y = y \quad \text{eller} \quad 1y = y,$$

uanset hvilket tal y repræsenterer. Og antages denne formelle ligning for lige så gyldig i dette værks system, hvor 1 og y repræsenterer klasser, skal symbolet 1 repræsentere en klasse af en sådan art, at alle de elementer, der findes i *enhver* forelagt klasse y, tillige er alle de elementer $1y$, som er fælles for denne klasse og klassen, der repræsenteres af 1. En nærmere overvejelse vil her vise, at klassen, der repræsenteres af 1, må være Universet, da dette er den eneste klasse, hvori man finder *alle* elementer, som findes i enhver klasse. Følgelig er de respektive fortolkninger af symbolerne 0 og 1 i logikken *Intet* og *Universet.*

14. Da forestillingen om en klasse som "mennesker" antyder forestillingen om en modsat klasse af væsener, der ikke er mennesker, og hele Universet udgøres af disse to klasser tilsammen, idet vi om ethvert element, som det omfatter, kan hævde, enten at det er et menneske, eller at det ikke er et menneske, bliver det af betydning at undersøge, hvorledes sådanne modsatte angivelser skal udtrykkes. Dette er emnet for den følgende sætning.

Sætning III

Hvis x repræsenterer en vilkårlig klasse af genstande, da vil $1-x$ repræsentere den modsatte eller supplerende klasse af genstande, dvs. den klasse, der indeholder alle de genstande, der ikke er omfattet af klassen x.

For den større begrebsklarheds skyld vil vi lade x repræsentere klassen "mennesker" og i overensstemmelse med den sidste sætning betegne Universet med 1; hvis vi nu fra forestillingen om Universet som bestående af "mennesker" og "ikke-mennesker" udelukker opfattelsen "mennesker", så vil den resterende opfattelse være den modsatte klasse "ikke-mennesker". Følgelig vil klassen "ikke-mennesker" være repræsenteret af $1-x$. Og i almindelighed gælder, at ligegyldigt hvilken klasse der er repræsenteret af symbolet x, så vil den modsatte klasse udtrykkes ved $1-x$.

Sætning IV

Det af metafysikernes axiomer, der kaldes for modsigelses-princippet, og som hævder, at det er umuligt for noget væsen at besidde en egenskab og samtidig ikke besidde den, er en konsekvens af den fundamentale tankens lov, hvis udtryk er $x^2 = x$.

Lad os skrive denne ligning på formen

$$x - x^2 = 0,$$

hvoraf vi får

$$x(1-x) = 0, \tag{2}$$

idet begge disse transformationer er tilladt ifølge de axiomatiske love om kombination og omflytning (II.13). Lad os for simpelheds skyld give symbolet x den bestemte fortolkning “mennesker”: $1 - x$ vil da repræsentere klassen af “ikke-mennesker” (Sætn. III). Nu repræsenterer det formelle produkt af udtrykkene for to klasser den klasse, der udgøres af de elementer, der er fælles for dem begge (II.6). Følgelig vil $x(1-x)$ repræsentere den klasse, hvis elementer på én gang er “mennesker” og “ikke-mennesker”, og ligningen (2) udtrykker derfor det princip, *at en klasse, hvis elementer på samme tid er mennesker og ikke-mennesker, ikke eksisterer;* med andre ord, *at det er umuligt for det samme individ på én gang at være et menneske og ikke et menneske.* Lad nu betydningen af symbolet x udstrækkes fra at repræsentere “mennesker” til at repræsentere en vilkårlig klasse af elementer karakteriseret ved en eller anden vilkårlig egenskab, og ligningen (2) vil da udtrykke, at det er umuligt for et væsen på samme tid at besidde en egenskab og ikke besidde denne egenskab. Men dette er identisk med “modsigelsesprincippet” som Aristoteles har betegnet som det fundamental axiom for al filosofi. “Det er umuligt, at den samme egenskab både skulle tilhøre og ikke tilhøre samme ting … Dette er det visse af alle principper … Hvorfor de, der beviser, henviser til dette som en grundanskuelse. Thi det er af naturen udspringet for alle de andre axiomer.”

Ovenstående fortolkning er ikke indført på grund af dens umiddelbare værdi i det foreliggende system, men som en illustration af en betydningsfuld kendsgerning i filosofien om de intellektuelle evner, nemlig at det, der i almindelighed er blevet betragtet som metafysikkens fundamentale axiom, blot er en konsekvens af en tankens lov, matematisk i sin form.

Tekst 36: Dedekind om irrationale tal

Det lykkedes flere forskellige matematikere uafhængigt af hinanden omkring 1870 at lave en konstruktion af de irrationale tal ud fra de rationale. Richard Dedekind publicerede sin konstruktion i 1872 i form af værket *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, hvorfra der er gengivet udklip nedenfor efter den danske oversættelse i [Wolff 1967, pp. 130–39].

a) Hvad var Dedekinds motivation til at give differentialregningen et aritmetisk grundlag? Hvilken sætning følte han specielt savnede et ordentligt bevis?

b) Gennemgå Dedekinds karakteristik af de rationale tal og af linien. Hvordan beskriver han liniens kontinuitet?

Richard Dedekind

Kontinuitet og irrationale tal

Første gang min opmærksomhed henledtes på de betragtninger, der er emnet for dette skrift, var i efteråret 1858. Som professor ved den polytekniske læreanstalt i Zürich skulle jeg for første gang forelæse over elementer af differentialregningen, og jeg følte stærkere end nogen sinde før mangelen af et strengt videnskabeligt grundlag for aritmetikken. Under diskussionen af en variabel størrelses nærmen sig til en grænseværdi og især under beviset for sætningen om, at enhver størrelse, der vokser kontinuert og ikke ud over alle grænser, med sikkerhed nærmer sig til en grænseværdi, måtte jeg ty til geometriske metoder. Selv på nuværende tidspunkt betragter jeg anvendelsen af geometrisk anskuelighed i en første præsentation af differentialregningen som overordentlig nyttig set fra et pædagogisk synspunkt, og den er helt uundværlig, hvis man ikke har for megen tid at spilde. At denne form for indførelse i differentialregningen imidlertid ikke kan gøre krav på at være videnskabelig, vil ingen benægte. For mit eget vedkommende var denne følelse af utilfredsstillelse så overvældende, at jeg over for mig selv aflagde det løfte vedblivende at fundere over dette spørgsmål, indtil jeg havde fundet et strengt, rent aritmetisk grundlag for principperne i infinitesimal-analysen. Det erklæres så ofte, at differentialregningen beskæftiger sig med kontinuerte størrelser, og dog gives der ingen steder forklaring af denne kontinuitet. Selv de mest dybtgående fremstillinger af differentialregningen baserer ikke deres beviser på kontinuitet, men gør, mere eller mindre uden at vide det, brug af geometriske begreber eller af ideer hentet i geometrien, eller bygger på sætninger, der aldrig godtgøres på rent aritmetisk vis. Til disse sidstnævnte hører for eksempel ovennævnte sætning, og en nøjere undersøgelse overbeviste mig om, at denne sætning eller en dermed ensbetydende på en måde kunne betragtes som et tilstrækkeligt grundlag for infinitesimal-analysen. For på samme tid at sikre sig en virkelig definition af kontinuitetens væsen resterede det da blot at afsløre sætningens sande oprindelse i aritmetikkens grundelementer.

Dedekind nævner derefter, at han fandt en sådan definition af kontinuitetens væsen i november 1858, men at han først har følt behov for at publicere den efter at have fået kendskab til Heines og Cantors arbejde på samme område.

I. Egenskaber ved de rationale tal

Den aritmetiske indførelse af de rationale tal forudsættes her bekendt, [...]

Dette system [af de rationale tal], som jeg vil betegne med R, besidder den fuldstændighed og den afsluttethed, som jeg andetsteds[1] har fremdraget som det karakteristiske for et tallegeme, og som går ud på, at de fire fundamentale operationer altid lader sig udføre med hvilke som helst to elementer fra R, idet vi dog som eneste undtagelsestilfælde må se bort fra division med 0.

Det er imidlertid en ganske anden egenskab ved systemet R, der er den vigtigste i dette tilfælde; vi kan udtrykke den ved at sige, at systemet R udgør et ordnet en-dimensionalt område, der strækker sig i det uendelige i to hinanden modsatte retninger. Hvad der menes hermed, er tydeligt angivet ved min brug

[1] *Vorlesungen über Zahlentheorie* af P. G. Lejeune Dirichlet, 2. udg., §159.

af udtryk fra geometrien; men netop i denne sammenhæng er det nødvendigt, at man fuldstændigt klargør de tilsvarende rent aritmetiske egenskaber, for at det ikke på nogen som helst måde skal tage sig ud, som havde aritmetikken brug for ideer, der er den helt uvedkommende.

Vil vi udtrykke, at symbolerne a og b repræsenterer et og samme rationale tal, skriver vi $a = b$ eller $b = a$. At to rationale tal er forskellige, giver sig til kende ved, at differensen $a - b$ enten har en positiv eller en negativ værdi. I det første tilfælde siges a at være større end b, b mindre end a, hvilket også angives ved symbolerne $a > b$, $b < a$.[2] Da $b - a$ i det sidstnævnte tilfælde har en positiv værdi, følger det, at $b > a$, $a < b$.

For disse to måder, som to tal kan afvige fra hinanden på, gælder følgende love:

I. Hvis $a > b$ og $b > c$, da $a > c$. Er a og c to forskellige tal, og er b større end det ene og mindre end det andet, vil vi uden betænkning og med tilskyndelse i geometriske begreber udtrykke dette kort ved at sige: b ligger mellem de to tal a og c.

II. Er a og c to forskellige tal, da ligger der uendelig mange forskellige tal mellem a og c.

III. Er a et vilkårligt fast tal, da falder alle tallene i systemet R i to klasser A_1 og A_2, der hver indeholder uendelig mange elementer; den første klasse A_1 omfatter alle tal a_1, som er $< a$, den anden klasse A_2 består af alle tal a_2, der er $> a$. Tallet a selv kan efter behag tilskrives den første eller den anden klasse, og det bliver da henholdsvis det største tal i den første klasse eller det mindste tal i den anden. I begge tilfælde er opdelingen af systemet R i de to klasser A_1 og A_2 af en sådan art, at ethvert tal i den første klasse A_1 er mindre end ethvert tal i den anden klasse A_2.

II. Sammenligning af de rationale tal med punkterne på en ret linie

De ovennævnte egenskaber ved de rationale tal leder tanken hen på de tilsvarende beliggenhedsrelationer mellem punkterne på en ret linie L. Betegnes de to modsatte retninger på L med "højre" og "venstre", og er p og q to forskellige punkter, da vil enten p ligge til højre for q og samtidig q til venstre for p eller omvendt q ligge til højre for p og samtidig p til venstre for q. En tredie mulighed kan ikke indtræffe, hvis p og q da virkelig er forskellige punkter. For denne forskel i beliggenhed gælder følgende love:

[2] I det følgende menes dette såkaldt "algebraiske" større end og mindre end, medmindre der tilføjes ordet "absolut".

I. Hvis p ligger til højre for q og q til højre for r, da ligger p til højre for r, og vi siger, at q ligger mellem punkterne p og r.

II. Hvis p og r er to forskellige punkter, da ligger der altid uendelig mange punkter mellem p og r.

III. Hvis p er et givet punkt på L, da falder alle punkterne på L i to klasser P_1 og P_2, som hver indeholder uendeligt mange elementer; den første klasse P_1 indeholder alle punkter p_1, som ligger til venstre for p, og den anden klasse P_2 indeholder alle punkter p_2, som ligger til højre for p; punktet p selv kan efter behag medregnes i den første eller den anden klasse. I begge tilfælde er opdelingen af den rette linie L i to klasser eller dele af en sådan art, at ethvert punkt i den første klasse P_1 ligger til venstre for ethvert punkt i den anden klasse P_2.

Denne analogi mellem de rationale tal og punkterne på en ret linie bliver som bekendt til en virkelig korrespondance, når vi på den rette linie fastlægger et bestemt begyndelsespunkt eller nulpunkt O og en bestemt enhedslængde til brug ved måling af liniestykker. Ved hjælp af denne sidstnævnte kan den til ethvert rational tal a svarende længde konstrueres, og indlægger vi denne på den rette linie, til højre eller til venstre for O, eftersom a er positiv eller negativ, når vi frem til et bestemt endepunkt p, der kan betragtes som det til tallet a svarende punkt; til det rationale tal nul svarer punktet O. På denne måde vil der til ethvert rationalt a, det vil sige til ethvert element i R, svare et og kun et punkt p, dvs. et element i L. Hvis de to punkter p og q henholdsvis svarer til tallene a og b, og hvis $a > b$, da ligger p til højre for q. Til lovene I, II, III i det foregående afsnit svarer fuldstændig lovene I, II, III i dette.

III. Den rette linies kontinuitet

Det er imidlertid af den allerstørste vigtighed, at der på den rette linie L findes uendelig mange punkter, der ikke svarer til noget rationalt tal. Dersom punktet p svarer til det rationale tal a, så er som bekendt længden Op kommensurabel med den ved konstruktionen af p konstante længdeenhed, dvs. at der findes en tredie længde — et såkaldt fællesmål — som er et helt multiplum af disse to længder. Men allerede oldtidens grækere vidste og kunne give bevis for, at der findes længder, som er inkommensurable med en givet længdeenhed, for eksempel diagonalen i det kvadrat, der har længdeenheden som side. Afsætter vi på linien L en sådan længde ud fra punktet O, får vi et endepunkt, der ikke vil svare til noget rationalt tal. Da det endvidere let kan vises, at der findes uendelig mange længder, som er inkommensurable med længdeenheden, må vi fastslå: den rette linie L er uendeligt rigere på punktelementer, end området R af rationale tal er det på talelementer.

Hvis vi nu, som det er vort ønske, forsøger at følge alle fænomener på den rette linie op inden for aritmetikken, viser de rationale tals område sig at være utilstrækkeligt, og det bliver tvingende nødvendigt, at det ved indførelsen af de rationale tal konstruerede instrument R væsentlig forbedres ved indførelsen af nye tal, således at tallenes område opnår samme fuldstændighed — eller som vi straks vil sige — samme kontinuitet som den rette linie. [...]

Ovenstående sammenligning af de rationale tals område R med en ret linie førte til erkendelsen af visse huller i førstnævnte område, altså en vis ufuldstændighed eller diskontinuitet, hvorimod vi jo tilskriver den rette linie fuldstændighed, mangel på huller, eller kontinuitet. Hvori består da denne kontinuitet? [...] Længe spekulerede jeg forgæves herover, indtil jeg endelig fandt, hvad jeg søgte. Denne opdagelse vil man sikkert vurdere forskelligt; de fleste vil formodentlig være af den mening, at den i sit hovedindhold er ganske triviel. Den går ud på følgende: I det foregående afsnit blev det fremhævet, at ethvert punkt p på den rette linie frembringer en deling af denne i to klasser, således at ethvert punkt i den ene klasse ligger til venstre for ethvert punkt i den anden. Jeg mener, at kontinuitetens væsen består i det omvendte, dvs. følgende, princip:

> "Dersom alle den rette linies punkter falder i to klasser, således at ethvert punkt i den ene klasse ligger til venstre for ethvert punkt i den anden klasse, da findes der et og kun et punkt, der frembringer denne opspaltning af den rette linie i to dele."

Som jeg allerede har sagt, så tror jeg ikke, jeg tager fejl, når jeg antager, at alle straks vil indrømme mig gyldigheden af denne påstand; de fleste af mine læsere vil sikkert blive meget skuffede ved at erfare, at det er denne trivielle bemærkning, der afslører kontinuitetens hemmelighed. Hertil vil jeg sige, at jeg vil være glad, om alle finder ovenstående princip indlysende og i overensstemmelse med deres egen opfattelse af den rette linie; thi jeg er helt og aldeles ude af stand til at anføre et bevis for dets gyldighed, og det er der ingen, der magter. Antagelsen af denne egenskab ved linien er simpelthen et axiom, der tilfører linien dens kontinuitet. [...]

IV. Indførelse af de irrationale tal

Ud fra disse sidste bemærkninger er det tilstrækkeligt klart, hvorledes de rationale tals diskontinuerte område R kan gøres fuldstændigt, så at det udgør et kontinuert område. I Afsnit I fremhævedes det, at ethvert rationalt tal a frembringer en deling af systemet R i to klasser, således at ethvert tal a_1 i den første klasse A_1 er mindre end ethvert tal a_2 i den anden klasse A_2; tallet a er da enten det største tal i klassen A_1 eller det mindste tal i klassen A_2. Er der nu givet en vilkårlig deling af systemet R i to klasser A_1 og A_2, hvis eneste karakteristiske egenskab er, at ethvert tal a_1 i A_1 er mindre end ethvert tal a_2 i A_2, da vil vi for kortheds skyld kalde denne deling for et *snit* og betegne den (A_1, A_2). Vi kan derfor sige, at ethvert rationalt tal a frembringer et snit, eller rettere sagt to snit, som vi imidlertid ikke vil anse for væsensforskellige; dette snit har *yderligere* den egenskab, at der enten blandt tallene i den første klasse findes et, der er størst, eller at der blandt tallene i den anden klasse findes et, der er mindst. Og omvendt, har et snit denne egenskab, da er det frembragt af et sådant største og eller mindste rationalt tal.

Men det er let at vise, at der findes uendelig mange snit, som ikke er frembragt af noget rationalt tal.

Dedekind viser dernæst omhyggeligt, at hvis D er et helt tal, der ikke er et kvadrattal, og A_2 består af de positive, rationale tal hvis kvadrat er større end D, og A_1 af resten af de rationale tal, så findes intet rationalt tal som frembringer snittet (A_1, A_2).

Ufuldstændigheden eller diskontinuiteten af de rationale tals område R giver sig netop til kende ved, at det ikke er alle snit, der er frembragt af rationale tal.

Når som helst vi har at gøre med et snit (A_1, A_2), der ikke er frembragt af et rationalt tal, indfører vi et nyt såkaldt *irrationalt* tal a, som vi vil betragte som fuldstændigt defineret ved snittet (A_1, A_2); vi siger om tallet a, at det svarer til dette snit, eller at det frembringer dette snit. Der vil altså fra nu af til ethvert forelagt snit svare et bestemt rationalt eller irrationalt tal, og vi vil betragte de to tal som *forskellige* eller *ulige store*, når og kun når de svarer til væsensforskellige snit.

Dedekind viser herefter at systemet af rationale og irrationale tal kan ordnes, så de opfylder lovene I, II og III, samt kontinuitetsprincippet, og at man kan indføre de fire regneoperationer på dem, samt at disse vil opfylde de velkendte love.

Litteraturliste

Aaboe, Asger 1966:
Episoder af matematikkens historie. Munksgaard, København 1966.

Abel, N. H. 1902:
Breve fra og til Abel, *Festskrift ved Hundredaarsjubilæet for Niels Henrik Abels Fødsel*. Jacob Dybwad, Kristiania 1902.

al-Khwārizmī, Muhammad ibn Musa 1831:
The algebra of Mohammad ben Musa. Edited and translated by Frederic Rosen, London 1831.

Andersen, Kirsti (red.) 1986:
Kilder og kommentarer til ligningernes historie. Forlaget Trip, Vejle 1986.

Andersen, Kirsti m.fl. (red.) 1987:
Træk af den matematiske analyses historie: En antologi af kilder og sekundær litteratur. Aarhus Universitet 1987.

Cardano, Girolamo 1968:
The Great Art or The Rules of algebra. Translated and edited by T. Richard Witmer. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts & London, England 1968.

Cauchy, Augustin-Louis 1821:
Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Debure frères, Paris 1821. Genoptrykt i *Œuvres* (2), **III**.

Eibe, Thyra 1897–1912:
Euklids Elementer, Bog I–XIII. Oversat af Thyra Eibe. Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag, København & Kristiania 1897–1912. Bog I–II, 1897, 94 pp.; Bog III–IV, 1900, 90 pp.; Bog V–VI, 1904, 98 pp.; Bog VII–IX, 1912, 118 pp.; Bog X, 1912, 177 pp.; Bog XI–XIII, 1912, 178+x pp.

Euler, Leonard 1921:
Opera Omnia, Series Prima, Volume VI: Commentationes algebraicae ad theoriam aequationum pertinentes. Lipsiae et Berolini, B. G. Teubner 1921.

Fauvel, John & Gray, Jeremy (eds.) 1987:
The History of Mathematics: A Reader. The Open University, Milton Keynes 1987.

Fourier 1822:
Théorie analytique de la chaleur. Firmin Didot, pére et fils, Paris 1822. Genoptrykt i *Œuvres* **I**.

Grant, Edward (ed.) 1974:
A Source Book in Medieval Science. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1974.

Heath, Thomas L. (ed.) 1953:
The Works of Archimedes with the Method of Archimedes. Dover Publications, New York 1953.

l'Hospital, G. F. A. de 1988:
Analyse af de uendeligt små størrelser til forståelse af kurver. Oversat og kommenteret af Kirsti Andersen. Foreningen Videnskabshistorisk Museums Venner, Århus 1988.

Hughes, Barnabas (transl.) 1967:
Regiomontanus on Triangles. The University of Wisconsin Press, Madison, Milwaukee & London 1967.

Katz, Victor J. 1993:
A History of Mathematics: An Introduction. HarperCollins College Publishers, New York 1993.

Katz, Victor J. 1998:
A History of Mathematics: An Introduction. Second edition. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1998.

Lay-Young, Lam & Tian-Se, Ang 1987:
The earliest negative numbers: How they emerged from a solution of simultaneous linear equations. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* **37** (1987), pp. 222–62.

Libbrecht, Ulrich 1973:
Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. The Shu-shu chiu-chang of Ch'in in Chiu-shao. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts & London, England 1973.

Midonick, H. O. 1965:
The Treasury of Mathematics. Philosophical Library, New York 1965.

Neugebauer, O. 1935:
Mathematische Keilschrift-Texte. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung A, 3. Band, Zweiter Teil: Register, Glossar, Nachträge Tafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1935.

Neugebauer, O. & Sachs (eds.) 1945:
Mathematical Cuneiform Texts. American Oriental Series, Volume 29. American Oriental Society & American School of Oriental Research, New Haven 1945.

Oluffssøn, Anders 1607:
En ny Konstig Regne Bog, vdi Tal Maader oc Vecter, paa Lynnerne och met Ziffre, baade vdi helt och brødit tall, met skiøne och nyttige Regle och konstige Exempler, og der til nogle Kiøbmandskaffs Taffler, hvilcken gantske nyttig oc gaffnlig er dennem som bruge Verdzslig handel oc Kiøbmandskaff. København 1607.

Smith, David Eugene (ed.) 1959:
A Source Book in Mathematics. Dover Publications, New York 1959.

Smith, David E. & Latham, M. L. (transl.) 1954:
The Geometry of René Descartes. Dover Publications, New York 1954.

Struik, D. (ed.) 1969:
A Source Book in Mathematics, 1200–1800. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts 1969.

Unguru, Sabetai 1975–76:
On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics, *Archive for History of Exact Sciences* **15** (1975–76), pp. 67–114.

van der Waerden, B. L. 1975–76:
Defence of a "Shocking" Point of View, *Archive for History of Exact Sciences* **15** (1975–76), pp. 199–210.

Whiteside, D. T. (ed.) 1964:
The Mathematical Works of Isaac Newton, Volume 1. Johnson Reprint Corp, 1964.

Wolff, Peter 1967:
Højdepunkter i matematikken. Steen Hasselbalchs Forlag, København 1967.