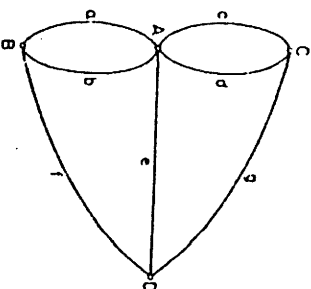
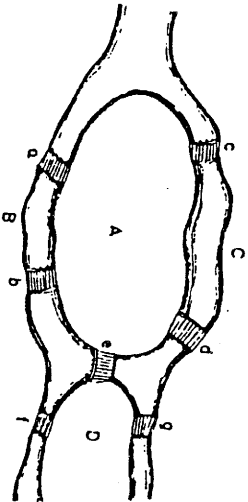


ALGORITMISK KOMBINATORIK

-et datalogisk orienteret emne i matematik-

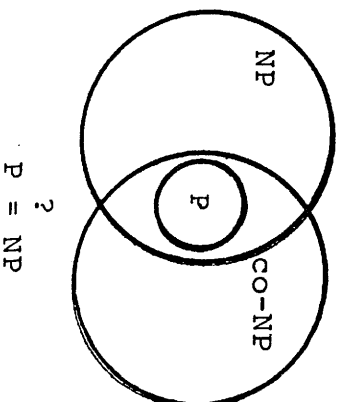


```

begin
  for i := 1 to n do
    for j := 1 to n do
      A[i, j] := C[i, j];
  for i := 1 to n do
    A[i, i] := 0;
  for k := 1 to n do
    for i := 1 to n do
      for j := 1 to n do
        if A[i, k] + A[k, j] < A[i, j] then
          A[i, j] := A[i, k] + A[k, j]
end
  
```

Det primære LP-problem har en optimal løsning hvis og kun hvis det duale LP-problem har en optimal løsning. Endvidere er de optimale værdier i de to problemer lig med hinanden.

12	9	10	8	11
8	6	6	5	9
13	10	10	11	11
6	2	4	3	5
11	7	10	9	11



Dette hæfte er skrevet for Matematiklærerforeningen, som udgav det i 1985. Det blev tilsendt alle medlemmer gratis. Et lille restoplæg blev solgt de følgende år.

Den foreliggende udgave er et fotografisk optryk af 1985 publikationen fra Matematiklærerforeningen. (bortset fra Appendix C, som var skrevet i 1985, men som ikke hørte med i den første udgave).

© Bjarne Toft, Institut for Matematik og Datalogi,
Syddansk Universitet, 5230 Odense M.

I N D H O L D

0.	FORORD	
0.1	Noternes formål kort fortalt	Side 0.1
0.2	Datalogisk matematik - en god ide?	- 0.2
0.3	Noternes indhold	- 0.3
0.4	Noternes omfang	- 0.4
0.5	Litteratur	- 0.4
I.	<u>RUTEPROBLEMER</u>	
I.1	Indledning	- 1.1
I.2	Tegning af figurer i én streg	- 1.5
I.3	Postbud-problemet	- 1.18
I.4	Korteste veje	- 1.23
I.5	Den grådige algoritme	- 1.34
I.6	Den handelsrejsendes problem	- 1.38
I.7	Litteratur	- 1.44
II.	<u>PARDANNELSE</u>	
II.1	Indledning	- 2.1
II.2	Ikke vægtet to-delt pardannelse	- 2.4
II.3	Job-tilordnings-problemet	- 2.13
II.4	Lineær programmering og dualitet	- 2.22
II.5	Transport-problemet	- 2.37
II.6	Litteratur	- 2.45
III.	<u>LETTE OG SVÆRE PROBLEMTYPER</u>	
III.1	Indledning	- 3.1
III.2	Gode algoritmer	- 3.4
III.3	Gode sætninger	- 3.8
III.4	NP-komplethed	- 3.12
III.5	Lineær programmering	- 3.15
III.6	Litteratur	- 3.18

APPENDIX A Grafteoretiske definitioner

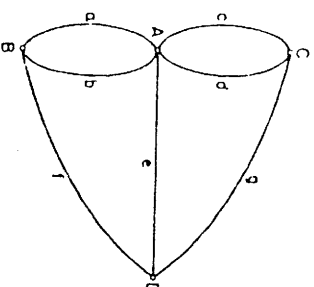
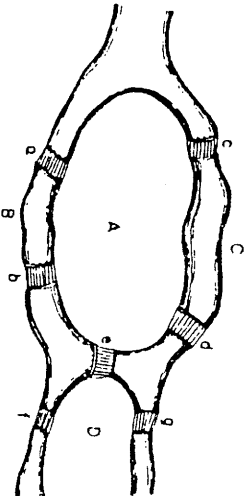
APPENDIX B Algoritmisk notation

APPENDIX C *Labgynter*

- A.1
- B.1
- C.1

ALGORITMISK KOMBINATORIK

-et datalogisk orienteret emne i matematik-

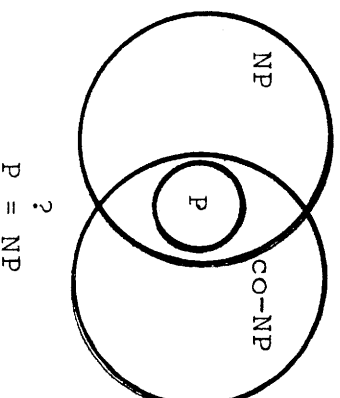


```

begin
for i := 1 to n do
  for j := 1 to n do
    A[i, j] := C[i, j];
  for i := 1 to n do
    A[i, i] := 0;
  for k := 1 to n do
    for i := 1 to n do
      for j := 1 to n do
        if A[i, k] + A[k, j] < A[i, j] then
          A[i, j] := A[i, k] + A[k, j]
end
  
```

Det primære LP-problem har en optimal løsning hvis og kun hvis det duale LP-problem har en optimal løsning. Endvidere er de optimale værdier i de to problemer lig med hinanden.

12	9	10	8	11
8	6	6	5	9
13	10	10	11	11
6	2	4	3	5
11	7	10	9	11



Bjarne Toft

Matematisk Institut, Odense Universitet, 5230 Odense M

1985

Udgivet af Matematiklærerforeningen

0. FORORD

0.1 NOTERNES FORMÅL KORT FORTALT

Dette sæt noter er udarbejdet som ét muligt undervisningsmateriale til emnet "Datalogisk matematik" (pkt. 7 i "Udkast til ny bekendtgørelse og undervisningsvejledning for faget matematik på den matematiske linjes matematisk-fysiske gren").

Kort fortalt er formålet med noterne at vise læseren samspillet mellem på den ene side udviklingen af brugbare algoritmer til løsning af problem-typer og på den anden side matematisk indsigt og forståelse.

Dette samspil har været kendt længe, men har specielt udviklet sig siden Anden Verdenskrig, startende med lineær programmering (*simplex-algoritmen* og dualitets-sætningen) og med løsning af pardannelsesproblemet, kompleksitetsteori og ellipsoide-algoritmen som nogle af de senere højdepunkter. Alt i alt er der tale om en "god historie" - det er dele af den, der skal fortælles her.

Det skal understreges, at der er tale om noter i *matematik*. Læseren lærer altså ikke her at programmere, og adgang til en computer forudsættes ikke. De beskrevne algoritmer angives enten helt uformelt (men dog nogenlunde præcist) eller i et pseudo-sprog bestående af sætninger med en mere formel opbygning (f.eks. IF... THEN... ELSE...; FOR... DO...; osv.) blandet med mindre formelle danske udsagn (en beskrivelse af dette pseudo-sprog findes i Appendix B). Man kan tænke på en algoritme angivet i dette pseudo-sprog som et trin i en udvikling på vej mod et egentligt computer-program. Det der specielt mangler i forhold til et computer-program er:

- a) en implementering af den eller de data-typer der forekommer (f.eks. mængder eller grafer), dvs. en repræsentation af data-typerne ved hjælp af de data-strukturer programmerings-sproget indeholder,
- b) procedurer udarbejdet i programmeringssproget for de operationer der benyttes på data-typerne (f.eks. at danne foreningsmængden af to mængder eller fjerne en kant fra en graf),
- c) indlæsning og udlæsning af data.

For nogle af de omtalte algoritmer er der af studerende ved Odense Universitet udarbejdet programmer bl.a. i Pascal. Kopier af disse programmer kan fås ved henvendelse til Matematisk Institut, Odense Universitet, 5230 Odense M.

Dele af teksten mellem \uparrow og \downarrow i venstre margin kan evt. overspringes. Sådanne dele kan benyttes som større opgaver eller mini-projekter.

0.2 DATALOGISK MATEMATIK - EN GOD IDE?

Det er ikke blot i det danske gymnasium, at man inddrager datalogisk orienterede emner i matematik-undervisningen. Tilsvarende overvejelser finder sted internationalt, også på universiteter, hvor den tidligere fremherskende studiekombination matematik-fysik i stigende grad afløses af matematik-datalogi og fysik-datalogi. I denne forbindelse vil datalogerne formentlig ønske sig ændringer i det traditionelle matematik-pensum.

Skal vi som matematikere hilse sådanne ønsker velkommen? Jeg mener *ja*. Meget firkantet sagt, er datalogi interesseret i matematiks væsen og metoder, hvor de traditionelle brugere mere er interesserede blot i matematiks resultater.

Udviklingen vil nok medføre ændringer i den måde vi under-viser på i f.eks. differential- og integralregning, og den vil medføre at nye emner fra diskret matematik vil vinde indpas. Nogen går så vidt som til at sige, at den anden industrielle revolution, som vi oplever nu med computer-teknologien, vil kræve en vægt på diskret matematik mindst lig med vægten på klassisk analyse. (*Diskret matematik* er den matematik, som drejer sig om endelige strukturer).

Som matematiker kan man godt have sine reservationer. Klassisk analyse er et smukt eksempel på en matematisk teori med fundamentale begreber og sætninger og smukke anvendelser. Diskret matematik kan i sammenligning synes uden tilsvarende indre sammenhæng og hovedidéer.

Det er imidlertid mit håb med dette notesæt at vise, at der også i diskret matematik er tale om en sammenhængende teori med fundamentale tankegange af god matematisk lødighed.

Det er mit synspunkt, at vi bør eksperimentere med ændringer i et begrænset omfang af den traditionelle matematikundervisning i datalogisk retning, og så tage ved lære af erfaringerne. Vi udsættes alle i fremtiden for datalogiens resultater på godt og ondt - at dreje matematikundervisningen for alle lidt i datalogiens retning er rimeligt. Og for de mange, som på den ene eller anden måde kommer til at arbejde med datamater, er det vigtigt. Vort samfund vil i højere og højere grad blive styret af computer-systemer (kemiske fabrikker, kraftværker, varedistribution, administration). Noget af det, der kan være med til at sikre disse systemers kvalitet, er relevant matematisk træning og tankegang.

0.3 NOTERNE'S INDHOLD

Datalogisk orienteret matematik kan være mange ting, og disse noter indeholder ét muligt bud: algoritmisk kombinatorik.

Hovedvægten i fremstillingen ligger i kapitel I og II med emnerne "ruteproblemer" og "paddannelse". I kapitel I er grebet *god algoritme* det centrale, og i kapitel II er det grebet *god sætning*.

Kapitel III er et fortællende afsnit, hvor trådene fra I og II knyttes sammen og belyses fra en mere overordnet synsvinkel.

Noterne er (desværre) udarbejdet i hast og har ikke været afprøvet i en undervisningssituation. De indeholder uden tvivl mange afsnit, som kunne have været skrevet mere pædagogisk og mere korrekt. Kommentarer og evt. forslag til forbedringer modtages med tak!

Jeg vil gerne takke specielt Bent Hirsberg for mange gode faglige og pædagogiske råd undervejs. Også kolleger og studerende ved OU har bidraget med udmærket hjælp, bl.a. Jørgen Bang-Jensen. Endelig en tak til Lise-Lotte Todbjerg-Nielsen og Matematisk Institut OU for den ydede effektive støtte.

0.4 NOTERNE'S OMFANG.

I et 30 timers undervisningsforløb er det næppe muligt i detaljer at nå hele dette hæfte, selv med overspringelser af afsnit mellem † og † .

Imidlertid er kapitlerne I og II uafhængige, således at ét muligt forløb er at dække kapitlerne I og III, og ét andet muligt forløb at dække kapitlerne II og III.

0.5 LITTERATUR.

Diskussioner fra USA om øget vægt til diskret matematik findes i

- "Mathematics tomorrow" (Ed. I.A. Steen), Springer 1981
 "The future of College Mathematics" (Ed. A. Ralston), Springer 1983.

Emnet algoritmisk kombinatorik er behandlet avanceret i

- E.L. Lawler: Combinatorial optimization: Networks and matroids , Holt, Rinehart & Winston 1976.
 C.H. Papadimitriou & K. Steiglitz: Combinatorial optimization, Algorithms and complexity , Prentice-Hall 1982.

Lidt mindre omfattende fremstillinger findes i

- S. Even: Algorithmic combinatorics , Macmillan 1973.
 S. Even: Graph algorithms , Computer Science Press & Springer 1979.

En ret avanceret datalogi-bog, som på mange punkter knytter an til de emner vi skal se på, er

- A.V. Aho, J.E. Hopcroft & J.D. Ullman: Data structures and algorithms , Addison-Wesley 1983.

Den bedste generelle introduktion til grafteori, også indeholdende algoritmiske aspekter, er

- J.A. Bondy & U.S.R. Murty: Graph Theory with Applications, MacMillan 1976.