Skriftlig Eksamen
Kombinatorik, sandsynlighed og randomiserede algoritmer (DM528)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet

Mandag den 3 Januar 2011, kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt. Brug af computer er ikke tilladt.

Eksamenssættet består af 6 opgaver på 6 nummererede sider (1–6). Fuld besvarelse er besvarelse af alle 6 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen, samt noterne. Dette gælder også de opgaver der har været stillet til eksaminatorierne, eller til aflevering. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen, noterne, eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt !). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål! **Husk at begrunde dine svar!**

OPGAVE 1 (10%)

Gør rede for, at $n! = n^n + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i C(n,i)(n-i)^n$.

Hint: se på afbildninger der er 1-1 og på (fra en mængde med n elementer til en mængde med n elementer).

OPGAVE 2 (10%)

Løs rekursionsligningen

$$a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \text{ for } n \geq 2 \text{ og}$$
$$a_0 = 3, a_1 = 10.$$

OPGAVE 3 (17%)

Bestem antallet af positive heltal n som er mindre end 10000, for hvilke summen af n's cifre (også kaldet tværsummen) er 25. Det vil sige at $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 25$, hvor $n = d_1d_2d_3d_4$ udtrykt i 10-tals systemet ($0 \leq d_i \leq 9$ og vi tillader representationer som 0078). Hint: du kan for eksempel anvende princippet om inklusion-eksklusion.

OPGAVE 4 (18%)

I denne opgave kan du for eksempel benytte dig af formlen i lærebogen side 509 for antallet af funktioner $f : X \to Y$ som er på og hvor $|X| = m$ og $|Y| = n$.

Spørgsmål a:

På hvor mange forskellige måder kan man fordele s forskellige emner i 5 forskellige kasser, så mindst en af kasserne er tom?

Spørgsmål b:

På hvor mange forskellige måder kan man fordele s forskellige emner i 5 forskellige kasser, så præcis en af kasserne er tom?

Spørgsmål c:

På hvor mange forskellige måder kan man fordele s forskellige emner i 5 forskellige kasser, så mindst to af kasserne er tomme?

Spørgsmål d:

Forklar hvorfor svaret i spørgsmål c ikke er lig med $\binom{5}{2}3^s$, som fås ved først at vælge to kasser, der skal være tomme og så tage alle mulige fordelinger af de s emner til de 3 sidste kasser.

OPGAVE 5 (17%)

En graf $B = (V, E)$ er **2-delt**, hvis vi kan opdele dens punktmængde V i to disjunkte mængder V_1, V_2, så enhver kant $uv \in E$ opfylder at $u \in V_1, v \in V_2$ eller $u \in V_2, v \in V_1$.

Lad $G = (V, E)$ være en graf som ikke nødvendigvis er 2-delt. En **udspændende 2-delt delgraf** af G er en 2-delt graf $H = (V, E')$ med den samme punktmængde som G og hvor kantmængden E' er en delmængde af G's kanter ($E' \subseteq E$). Bemærk, at en sådan H altid svarer til en opdeling U, W af V ($U \cap W = \emptyset$ og $U \cup W = V$) og E' er så (nogle af) de kanter fra E som har præcist et endepunkt i U. En given H kan svare til flere sådanne opdelinger.

Din opgave er at bevise, at enhver graf $G = (V, E)$ har en udspændende 2-delt delgraf $H^* = (V, E^*)$ som opfylder at $|E^*| \geq |E|/2$.

Du kan for eksempel enten bevise dette ved at beskrive (og vise korrektheden af) en algoritme som givet G konstruerer en sådan H^*, eller du kan bevise ved hjælp af den probabilistiske metode, at der eksisterer en sådan udspændende 2-delt delgraf.

Hvis du vælger den sidste metode, kan du med fordel betragte en tilfældig opdeling $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ som er frembragt ved at lade $v \in V$ tilhøre V_1 med sandsynlighed $\frac{1}{2}$ (og dermed V_2 med samme sandsynlighed).

Se nu på kanterne enkeltvis og vurder sandsynligheden for, at en givet kant går mellem V_1 og V_2. Brug dette til at bestemme det forventede antal kanter, der har præcist et endepunkt i V_1 (og dermed i V_2) og forklar, hvordan man ud fra dette antal kan konkludere eksistensen af den påståede 2-delte udspændende delgraf.

OPGAVE 6 (28%)

I denne opgave betragter vi tilfældige afbildninger $f : S \to T$ fra en mængde S til en anden mængde T, hvor $|S| = |T| = n$ og $n \geq 2$.

En tilfældig afbildning $f : S \to T$ genereres ved at udføre følgende eksperiment $\mathcal{Q}$: for hvert $s \in S$ vælger vi uniformt (sandsynlighed $\frac{1}{n}$ for alle elementer i T) et tilældigt $t \in T$ og vi sætter $f(s) = t$.

Mængden $f^{-1}(t) = \{s \in S | f(s) = t\}$ består så af de $s \in S$ som tildeles t som billede. Bemærk, at $0 \leq |f^{-1}(t)| \leq n$ og $\sum_{t \in T} |f^{-1}(t)| = n$.

Spørgsmål a:

Bestem sandsynligheden for at den genererede afbildning f er 1-1 og på.

Spørgsmål b:

Gør rede for, at det for alle $t \in T$ gælder, at det forventede antal elementer fra S som afbildes over i t er lig med 1. Hint: Betragt indikator variable $X_{t,s}$ som for $s \in S$ indikerer om $f(s) = t$ og udtryk $|f^{-1}(t)|$ ved hjælp af disse.

For ethvert $t \in T$ lader vi U_t, være hændelsen at $|f^{-1}(t)| = 1$.

Spørgsmål c:

Gør rede for, at $p(U_t) = (\frac{n-1}{n})^{n-1}$

Spørgsmål d:

Bestem for $t \neq t'$ den betingede sandsynlighed $p(U_{t'} | U_t)$.

Spørgsmål e:

Er hændelserne U_t og $U_{t'}$ uafhængige når $t \neq t'$?

Spørgsmål f:

Gør rede for, at det forventede antal elementer $t \in T$ for hvilke hændelsen U_t indtræffer er $n \cdot (\frac{n-1}{n})^{n-1}$.

Antag nu at vi gentager eksperimentet $\mathcal{Q}$ i alt r gange og at vi for et givet $t \in T$ lader X_t betegne antallet af disse eksperimenter i hvilket hændelsen U_t indtræffer.

Spørgsmål g:

Hvad er den forventede værdi $E(X_t)$ af X_t for et fast $t \in T$?

Spørgsmål h:

Brug Chernoff bounds til at vurdere sandsynligheden for at $X_t \geq 2 \cdot r \cdot (\frac{n-1}{n})^{n-1}$. Du skal blot opskrive den relevante ulighed som den kommer til at se ud, samt argumentere for, at du kan anvende Chernoff bounds til denne vurdering.