Skriftlig Eksamen
Algoritmer og Sandsynlighed (DM538)

Institut for Matematik og Datalogi
Syddansk Universitet, Odense

Fredag den 17. januar 2014 kl. 10–13

Eksamenssættet består af 3 opgaver på 3 nummererede sider (1–3).
Fuld besvarelse er besvarelse af alle 3 opgaver.
De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Bemærk, at de enkelte spørgsmål i en opgave ikke nødvendigvis har samme vægt.

Der må gerne refereres til resultater fra kursets lærebøger og øvelsesopgaver. Henvisninger til andre bøger accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Bemærk, at hvis der er et spørgsmål, man ikke kan besvare, må man gerne besvare de efterfølgende spørgsmål og blot antage, at man har en løsning til de foregående spørgsmål.

Husk at begrunde dine svar!

Opgave 1 (55%)

Denne opgave handler om en mundtlig eksamen, hvor der er 10 forskellige eksamensspørgsmål. Hver studerende trækker et af de 10 spørgsmål uniformt tilfældigt med tilbagelægning.

a) Antag, at en af de studerende forbereder sig på præcis seks af de 10 spørgsmål.

   Hvad er sandsynligheden for, at han trækker et spørgsmål, som han har forberedt sig på?

b) Antag, at der er 15 studerende, som går til eksamen.

   Hvad er det forventede antal gange et givet spørgsmål trækkes?

c) Antag igen, at der er 15 studerende, som går til eksamen.

   Beregn sandsynligheden for, at et givet spørgsmål trækkes præcis to gange.

d) Vis, at sandsynligheden for, at et givet spørgsmål trækkes mere end 4 gange, er mindre end $\frac{1}{4}$.

e) Hvad er det forventede antal gange, der skal trækkes et spørgsmål, før alle 10 spørgsmål er trukket mindst én gang hver?

f) Hvad er det forventede antal gange, der skal trækkes et spørgsmål, før fire forskellige spørgsmål er blevet trukket?

g) Antag igen, at en studerende har forberedt sig på seks ud af de 10 spørgsmål.

   Hvis han trækker et spørgsmål, han har forberedt sig på, består han med sandsynlighed 0.9.
   Hvis han trækker et spørgsmål, han *ikke* har forberedt sig på, er sandsynligheden for at bestå kun 0.3.

   Efter eksamen får vi at vide, at han er bestået, men ikke hvilket spørgsmål, han trak.

   Hvad er sandsynligheden for, at han trak et af de spørgsmål, han havde forberedt sig på?

Opgave 2 (30%)

Denne opgave handler om en tennis-turnering med $2n$ spillere. I første runde skal der spilles n kampe, hvor hver spiller møder præcis én af de andre spillere i en kamp. D.v.s. de $2n$ spillere skal inddeles i n par.

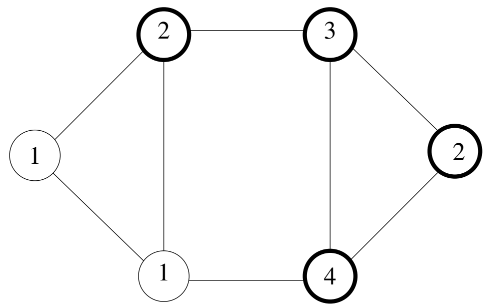
Hvis der er fire spillere A, B, C og D (d.v.s. $n = 2$), er der tre mulige opdelinger i to par: $AB \mid CD$, $AC \mid BD$ og $AD \mid BC$.

a) Antag nu, at der er 6 spillere, A, B, C, D, E og F (d.v.s. $n = 3$). Angiv samtlige mulige opdelinger af de seks spillere i tre par.

b) Lad a_{2n} angive antallet af mulige opdelinger af $2n$ spillere i n par. Argumentér for, at

$$\begin{aligned} &a_2 = 1 \text{ og} \\ &a_{2n} = (2n-1) \cdot a_{2n-2}, \text{ for } n \geq 2 \end{aligned}$$

c) Løs rekursionsligningen fra spørgsmål b). Det er i orden at angive dit svar som et produkt.



Figur 1: Illustration af Opgave 3: Hver knude har højst tre naboer. Hver knude er farvet med en af farverne 1, 2, 3 eller 4, og der er fire gode knuder.

Opgave 3 (15%)

Denne opgave handler om at farve knuderne i en graf v.h.a. højst fire farver. Hver knude i grafen skal vælge en af de fire farver, uden kendskab til hvilke farver de andre knuder vælger.

Vi ser udelukkende på grafer, hvor hver knude har højst tre naboer.

En knude v kaldes en *god* knude, hvis ingen af v's naboer har valgt samme farve som v. Se evt. eksemplet i Figur 1, hvor en graf er farvet med farverne $1, 2, 3, 4$, og de gode knuder er tegnet med fed.

Giv en randomiseret algoritme, som farver knuderne sådan, at det forventede antal gode knuder er mindst $\frac{27}{64}n$, hvor n er antallet af knuder i grafen. (Husk, at hver knude har højst tre naboer.)