Skriftlig Eksamen
Algoritmer og sandsynlighed (DM538)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet

Fredag den 9 Januar 2015, kl. 10–14

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt. Brug af computer er ikke tilladt.

Eksamenssættet består af 7 opgaver på 7 nummererede sider (2–8). Fuld besvarelse er besvarelse af alle 7 opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen, samt noterne. Dette gælder også de opgaver der har været stillet til eksaminatorierne, eller til aflevering. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at det umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen, noterne, eller én af de opgaver, der har været stillet på ugesedlerne (hvis dette altså er sandt !). Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål! **Husk at begrunde alle dine svar!**

OPGAVE 1 (15%)

Denne opgave handler om lineære rekursionsligninger.

Spørgsmål a:

Løs rekursionsligningen $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ med $a_1 = 4$ og $a_2 = 24$.

Spørgsmål b:

Løs rekursionsligningen $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 3^n$ med $a_1 = 9$ og $a_2 = 55$.

OPGAVE 2 (10%)

Denne opgave omhandler dueslagsprincippet (pigeonhole principle) .

Spørgsmål a:

Vis, ved at anvende dueslagsprincippet, at hvis man vælger 5 forskellige tal fra mængden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, så vil der være mindst et par x, y blandt de valgte tal, så $x + y = 9$. Hint: hvilke par har sum 9?

Spørgsmål b:

Generaliser dit argument ovenfor til at vise, at hvis man vælger $k+1$ forskellige tal blandt de første $2k$ positive heltal ($\{1, 2, \ldots, 2k-1, 2k\}$), så vil der være mindst et par x, y blandt de valgte tal, så $x + y = 2k + 1$

OPGAVE 3 (12%)

Denne opgave omhandler princippet om inklusion-eksklusion.

Vi ser på ternære følger over $0, 1, 2$ af lændge n. F.eks er 001221 en sådan følge af længde 6.

Spørgsmål a:

Gør rede for at der er 3^n ternære følger af længde n.

Spørgsmål b:

Hvor mange ternære følger er der som har mindst et 0, mindst et 1 og mindst et 2?

OPGAVE 4 (16%)

Denne opgave handler om fordeling af forskellige kugler i forskellige kasser.

Spørgsmål a:

På hvor mange måder kan man fordele 10 forskellige kugler i 4 forskellige kasser, så ingen kasse er tom?

Spørgsmål b:

På hvor mange forskellige måder kan man fordele 10 forskellige kugler i 4 forskellige kasser, så præcis en af kasserne er tom?

Antag nu at 20 forskellige kugler farves så der er 10 røde og 10 blå kugler (vi kan stadig kende forskel på alle kuglerne) og at disse derefter fordeles tilfældigt i 4 forskellige kasser

Spørgsmål c:

Hvad er sandsynligheden for at alle kasser indeholder både en rød og en blå kugle?

OPGAVE 5 (18%)

n kugler farves tilfældigt med farverne rød og blå så sandsynligheden for at en given kugle får farven rød er 1/2.

Spørgsmål a:

Hvad er det forventede antal kugler der bliver røde?

Spørgsmål b:

Lad X være hændelsen at der er mindst 3 gange så mange røde som blå kugler blandt de n farvede kugler.

Giv en øvre grænse for sandsynligheden af hændelsen X ved hjælp af hver af følgende to grænser som vi har benyttet i kurset:

(i) Markovs ulighed

(ii) Chernoff bounds.

Spørgsmål c:

Sammenlign de to grænser og forklar forskellen.

Antag nu, at kugler farves en ad gangen og stadig med sandsynlighed 1/2 for både rød og blå.

Spørgsmål d:

Hvad er det forventede antal kugler vi skal farve før vi får den første røde?

Spørgsmål e:

Hvad er det forventede antal kugler vi skal farve før vi har både en rød og en blå kugle?

OPGAVE 6 (10%)

Denne opgave omhandler tildeling af jobs af to forskellige typer A, B til n forskellige processorer. Vi antager af antallet af jobs af begge typer er stort i forhold til n og at de enkelte jobs tildeles et ad gangen til en tilfældig processor, dvs sandsynligheden for at en given processor får jobbet er $1/n$.

Spørgsmål a:

Hvad er det forventede antal jobs af type A vi skal tildele før alle processorer har fået mindst et job af type A?

Antag at vi skiftevis tildeler jobs af type A og B, dvs rækkefølgen er $ABABABAB$.......

Spørgsmål b:

Hvad er det forventede antal jobs vi skal tildele før alle processorer har fået mindst et job af hver type?

OPGAVE 7 (20%)

Denne opgave omhandler randomiserede algoritmer til farvning af grafer. Lad $G = (V, E)$ være en graf og lad $f : V \to \{1, 2, 3, 4\}$ være en farvning af G's punkter med 4 farver. Vi siger at en kant $uv \in E$ er **god** med hensyn til f hvis $f(u) \neq f(v)$.

Spørgsmål a:

Antag at $f : V \to \{1, 2, 3, 4\}$ er en tilfældig farvning af V med 4 farver (dvs. hvert punkt får farven i med sandsynlighed $1/4$ for $i = 1, 2, 3, 4$). Lad den stokastiske variable X betegne antallet af kanter fra E der er gode med hensyn til farvningen f. Vis at $E(X) = \frac{3|E|}{4}$.

Spørgsmål b:

Brug svaret ovenfor og den probabilistiske metode til at vise, at enhver graf $G = (V, E)$ har en 4-farvning f af sine punkter, som opfylder at mindst $\frac{3|E|}{4}$ kanter er gode med hensyn til f.

Spørgsmål c:

Forklar, hvordan man kan lave en randomiseret algoritme, som for en given graf $G = (V, E)$ finder en 4-farvning f^* af V som opfylder at mindst $\frac{3|E|}{4}$ er gode med hensyn til f^*. Hint: hvad gør du, hvis den tilfældige farvning f fra spørgsmål a har færre end $= \frac{3|E|}{4}$ gode kanter med hensyn til f?

Spørgsmål d:

Hvad er den forventede køretid af din algoritme? Hint: brug samme ide som i Kleinberg og Tardos side 726-727.