Skriftlig Eksamen
Beregnelighed (DM517)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet

Fredag den 16. januar 2009

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater osv.) samt brug af lommeregner er tilladt. Eksamenssættet består af 6 opgaver på 4 nummererede sider (1–4). Fuld besvarelse er besvarelse af alle opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at den umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen (hvis dette altså er sandt!). I må gerne bruge metoder eller udvidelser af sætninger som er udledt i opgaver, der er stillet i løbet af kurset

Bemærk dog, at det ikke er tilladt at besvare et delspørgsmål, udelukkende med en henvisning til, at det følger af en af opgaverne. Henvisninger til andre bøger (ud over lærebogen) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål.

Husk at alle påstande skal begrundes, og at der skal argumenteres at f.eks. en DFA fungerer korrekt.

1 Opgave 1 (20%)

Betragt følgende sprog:

$$L_1 = \{a^n b^m : n = 3k, k \geq 0, m = 2c, c \geq 0\}$$

$$L_2 = \{bb^n : n = 3k, k \geq 0\}$$

Spørgsmål a:
Lav en DFA som accepterer L_1.

Spørgsmål b:
Lav en DFA som accepterer L_2.

Spørgsmål c:
Er $L_1 \cup L_2$ regulært?

Spørgsmål d:
Angiv et regulært udtryk for $L_1 \cap L_2$.

Spørgsmål e:
Er $(L_1 - L_2)^*$ kontekstfrit?

2 Opgave 2 (10%)

Overvej følgende udvidelse af en DFA, som normalt er en 5-tuble $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, hvor $s \in Q$, dvs. A har netop én starttilstand. Dette udvides så automaten kan have mere end én starttilstand, og en streng accepteres hvis og kun hvis start i mindst en af disse starttilstande fører automaten til en accepterende tilstand. Formelt er den nye automat altså en 5-tuple $A' = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$, hvor $S \subseteq Q$, og

$$w \in L(A') \Leftrightarrow \exists s \in S : w \in L((Q, \Sigma, \delta, s, F))$$

hvor $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ er en normal DFA med s som starttilstand.

Spørgsmål a:
Gør rede for hvorvidt denne udvidede DFA er kraftigere end en normal DFA. Hvis den er kraftigere, så angiv et sprog som accepteres af en udvidet DFA, men ikke en normal DFA. Hvis den ikke er kraftigere, så argumentér for hvorfor det ikke er tilfældet.

3 Opgave 3 (30%)

Betragt følgende sprog:

$$L = \{a^n b^m : n = 2m \textit{ eller } n = m \textit{ eller } m = 2n\}$$

Spørgsmål a:
Bevis at L ikke er regulært.

Spørgsmål b:
Angiv en kontekstfri grammatik G for L. Argumentér for at G genererer netop L.

Spørgsmål c:
Vis en afledning af $aaaabb$ og $aabb$ i G.

Spørgsmål d:
Er grammatikken G flertydig? Begrund dit svar.

Spørgsmål e:
Er grammatikken G på Chomsky normalform? Hvis ikke, argumentér for hvorvidt der findes en kontekstfri grammatik G' som er i Chomsky normalform, sådan at $L(G) = L(G')$.

Spørgsmål f:
Angiv en stakautomat M som accepterer L.

Spørgsmål g:
Er stakautomaten M deterministisk? Begrund dit svar.

4 Opgave 4 (10%)

Beskriv en ikke-deterministisk Turing maskine M som skriver et tilfældigt positivt heltal på sit bånd hvis den startes med et tomt bånd. Turing maskinen arbejder altså med alfabetet $\Sigma = \{\triangleright, \sqcup, 0, 1, 2, \ldots, 9\}$. En beregning i M kunne f.eks. være $(s, \triangleright\underline{\sqcup}) \vdash^* (h, \triangleright 42\underline{\sqcup})$, hvor s er starttilstanden og h er en stoptilstand. Turing maskinen kan enten beskrives vha. en overgangstabel eller med tekst, men i begge tilfælde skal der argumenteres for at den fungerer korrekt.

5 Opgave 5 (5%)

Bevis at hvis L er semiafgørligt og $\overline{L}$ er Turing enumerabelt, så er $L \cap L'$ afgørligt for ethvert afgørligt sprog L'.

6 Opgave 6 (25%)

Nogle af nedenstående seks sprog er uafgørlige. Angiv hvilke af sprogene der er uafgørlige. For hvert sprog der er uafgørligt, bevis at det er tilfældet. Du behøver ikke argumentere for at et sprog afgørligt.

1. Givet den universelle kodning af to Turing maskiner M_1 og M_2, stopper M_1 på den tomme streng hvis og kun hvis M_2 stopper på den tomme streng?

2. Givet den universelle kodning af en Turing maskine M og en streng w, vil M bruge en overgang som skriver et $\sqcup$ på båndet inden for de første $|S|$ skridt af dens beregning på w, hvor $|S|$ er antal tilstande i M.

3. Givet den universelle kodning af en Turing maskine M og et positivt heltal k, stopper M på nogen streng af længde højst k?

4. Givet den universelle kodning af en Turing maskine M, stopper M med w som output for ethvert input w (med andre ord, beregner M identitetsfunktionen)?

5. Givet den universelle kodning af to Turing maskiner M_1 og M_2, har M_1 og M_2 lige mange tilstande og lige mange overgange som skriver et $\sqcup$ på båndet?

6. Givet den universelle kodning af en Turing maskine M, afgør M sproget $HALT = \{\langle P\rangle\langle w\rangle : P \textit{ stopper paa } w\}$?