

DM551 – 1. Eksamensopgave

Afleveres senest mandag den 29/2 2016 kl 14.00.

Regler

Dette er det første af to opgavesæt, som sammen med den mundtlige eksamen i April udgør eksamen i MM541. Dette første opgavesæt må løses i grupper på op til 3 personer. Det er ikke tilladt for forskellige grupper at arbejde sammen. I må derfor ikke vise jeres besvarelse til andre end dem i jeres egen gruppe. På den anden side kan I lære meget af at diskutere opgaverne med hinanden. Derfor må I gerne snakke om opgaverne på et overordnet plan og I må selvfølgelig diskutere eksaminatorieopgaver, som ligner de stillede opgaver.

Husk, at jeres besvarelse af denne opgave (og det andet sæt, som skal løses individuelt) er en del af eksamen, så gør jer umage med, at besvare alle spørgsmålene. **Det er vigtigt, at I argumenterer, så læseren kan følge jeres udregninger og forklaringer.**

Hvordan afleverer I jeres rapport?

Rapporten (en per gruppe) skal afleveres **både**

- som en **papir** kopi til instruktoren, dvs i dennes hyttefad (hvis I ønsker en kopi tilbage med rettelser på, skal I aflevere 2 kopier!) **og**
- som en **PDF** fil via Blackboard. Andre formater end PDF accepteres ikke!

På forsiden skal I skrive det fulde navn og de første 6 cifre i cpr nummer for alle deltagere i gruppen

Aflevering via Blackboard sker som følger:

- Vælg “MM541, Kombinatorisk Matematik, forår 2016”.
- Klik på “SDU Assignment” (i menuen i venstre side).
- Udfyld formularen og vedhæft din PDF fil. Afslut med ’submit’
- Blackboard sender en kvittering via email.

1 Eksamens opgaver

Løs nedenstående opgaver. **Husk at begrunde alle svar!**

Opgave 1

Denne opgave handler om en sportsturnering (f.eks ishockey) med n deltagende hold, hvor hvert hold spiller mod alle andre hold præcis en gang. Dvs hvis der f.eks er 4 hold $\{a, b, c, d\}$, så er der 6 kampe, nemlig ab, ac, ad, bc, bd, cd , hvor ij betyder i mod j . Antag nedenfor, at ingen kampe ender uafgjort, dvs et af de to hold vinder kampen. Bemærk yderligere, at resultatet (3-4) ikke er det samme som resultatet (4-3) for kampen mellem i og j , da i taber den første kamp og vinder den anden.

- (a) Hvor mange kampe skal der spilles der ialt, hvis der er n hold? Kald dette antal K nedenfor.
- (b) Antag at intet hold laver mere end 7 mål i en kamp. Hvor mange forskellige resultater er der så af en kamp og hvor stor skal n være før der altid vil være to af de K kampe, som ender med det samme resultat?
- (c) Turneringen spilles over en periode på 6 måneder. Hvor stor skal n (antallet af hold) være for at der altid vil være 3 hold x, y, z således at der enten gælder, at alle de tre indbyrdes kampe mellem disse er spillet i de første 3 måneder af turneringen, eller alle de tre kampe er spillet i de sidste 3 måneder af turneringen?

Opgave 2

Brug binomialformlen til at vise, at der for alle ikke negative heltal n gælder at

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^k$$

Opgave 3

- (a) Bestem antallet af ikke negative heltallige løsninger til $x_1 + x_2 + x_3 = 13$.
- (b) Hvor mange løsninger er der, hvis vi også kræver at $x_1 \geq 3, x_2 \geq 1$ og $x_3 \geq 2$.
- (c) På hvor mange måder kan man fordele 13 identiske bolde i 3 forskellige kasser k_1, k_2, k_3 , således at k_1 indeholder højst 5 bolde, k_2 indeholder højst 6 bolde og k_3 indeholder højst 4 bolde?

Opgave 4

Lad G_1, G_2, G_3 være graferne i Figur 1.

- (a) Hvilke (om nogen) af graferne har en lukket Eulertur? For dem der har en sådan, skal du angive en kantrækkefølge, som er en Eulertur i grafen.

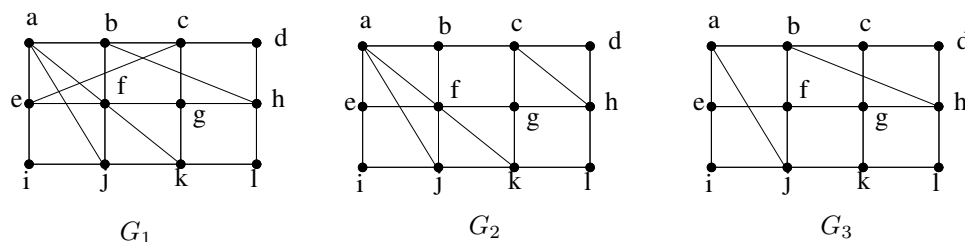


Figure 1: Tre grafer som hver har 12 punkter betegnet $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

- Hvilke (om nogen) af graferne har en åben Eulertur? For dem der har en sådan, skal du angive en kantrækkefølge som er en åben Eulertur i grafen.
- Antag nu, at vi må tilføje nye kanter till de tre grafer, så hver af disse nye grafer har en lukket Eulertur. De nye kanter må forbinde vilkårlige to forskellige punkter også selvom disse ikke var forbundet i G_i . Hvad er det mindste antal nye kanter der skal tilføjes til hver af graferne G_1, G_2, G_3 for at opnå nye grafer G_i^+ , $i = 1, 2, 3$, som har en lukket Eulertur?
- Lad nu G være en sammenhængende graf hvor alle valenser er lige, dvs G har en lukket Eulertur. Bevis, at der for vilkårlige to forskellige punkter x og y i G gælder at G har to veje $P_{x,y}$ og $P_{y,x}$, som begge har endepunkter i x og y (dvs vejene går mellem disse to punkter) og som ingen fælles kanter har.

Opgave 5

Jørgen har lånt en elbil til den kommende weekend og vil gerne køre en søndagstur. Desværre kan han ikke finde ud af at få elbilen opladt, så han kan ikke køre længere end bilen kan køre på en opladning (bilen er fuldt opladt når han låner den). Bilen kan køre 20K kilometer¹ når den starter fuldt opladt. Jørgen, som bor i by A , har udvalgt sig 7 mulige byer B, C, D, E, F, G, H , som han godt kunne tænke sig at besøge.

Afstandene (kun de direkte, dvs ikke via andre byer) mellem disse byer er angivet i Figur 2 (som multipla af K). Jørgens problem er nu at finde ud af, hvilke byer blandt de 7 han ville kunne besøge og nå tilbage til sin hjemby, uden at løbe tør for strøm. Bemærk, at han blot vil vide hvilke af de 7 byer han ville kunne nå ud til og tilbage igen, ikke hvor mange han ville kunne besøge på den samme rute!

Jørgen, der ikke er så god til at regne, beder derfor sine MM541 studerende om hjælp. Her er mange kvikke hoveder og en af dem siger, at det kan klares ved at udregne de korteste veje fra Jørgens by A til alle de andre byer. Jørgen bliver meget glad og beder derfor om forklaring på dette.

- Vis, hvordan man udregner de korteste afstande fra byen A til alle de andre ved hjælp af Dijkstras algoritme (Rosen side 684). Du skal vise de enkelte skridt i algoritmen (dvs for hver gang et nyt punkt indsættes i mængden S .)

¹ K ikke er vigtig i denne opgave, men blot er med for at gøre tallene i Figur 2. lettere at arbejde med. Da K er betydeligt større end 1, f.eks 25 for en Tesla, kan vi se blot fra afstande indenfor den samme by.

- (b) For hvilke af de 7 byer B, C, D, E, F, G, H vil Jørgen kunne besøge byen og nå tilbage til A uden at løbe tør for strøm?
- (c) Beskriv hvilke byer der ligger på den korteste vej fra A til H .

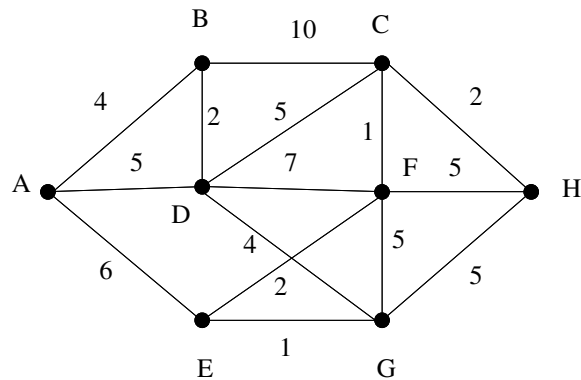


Figure 2: Grafen viser de direkte afstandene mellem de 8 byer i Jørgens problem. Tallene på kanterne repræsenterer den direkte afstand mellem det tilsvarende par af byer. Alle afstande er angivet som multipla af K , dvs 4 står for $4K$.