

DM551 – 2. Eksamensopgave

Afleveres senest fredag den 1/4 2016 kl 10.00.

Regler

Dette er det andet af to opgavesæt, som sammen med den mundtlige eksamen 13-15 April udgør eksamen i MM541. Dette opgavesæt skal besvares selvstændigt. Det er ikke tilladt at arbejde sammen med andre om opgaverne. I må derfor ikke vise jeres besvarelse til andre.

Husk, at jeres besvarelse af denne opgave (ligesom det var tilfældet med den første) er en del af eksamen, så gør jer umage med, at besvare alle spørgsmålene. **Det er vigtigt, at I argumenterer, så læseren kan følge jeres udregninger og forklaringer.**

Hvordan afleverer I jeres rapport?

Rapporten skal afleveres **både (!!!)**

- som en **papir** kopi til instruktoren, dvs i dennes hyttefad (hvis I ønsker en kopi tilbage med rettelser på, skal I aflevere 2 kopier!) **og**
- som en **PDF** fil via Blackboard. Andre formater end PDF accepteres ikke!

På forsiden skal I skrive det fulde navn og de første 6 cifre i cpr nummer.

Aflevering via Blackboard sker som følger:

- Vælg “MM541, Kombinatorisk Matematik, forår 2016”.
- Klik på “SDU Assignment” (i menuen i venstre side).
- Udfyld formularen og vedhæft din PDF fil. Afslut med 'submit'
- Blackboard sender en kvittering via email.

1 Eksamens opgaver

Løs nedenstående opgaver. **Husk at begrunde alle svar!**

Opgave 1

Denne opgave handler om mindste udspændende træer.

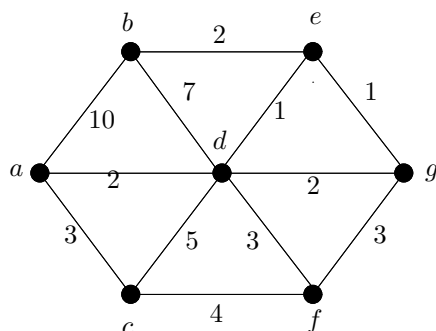


Figure 1:

- (i) Håndkør Kruskals algoritme (også kaldet den grådige algoritme) på den vægtede graf i Figur 1. Det skal fremgå klart af din besvarelse, hvilke kanter du ser på i de enkelte skridt. Dette kan du f.eks. gøre ved, at vise en lille tegning, der viser, hvordan skoven bestående af de kanter, der er valgt indtil nu udvikler sig og forklare, hvorfor en kant evt ikke kommer med i løsningen. Du kan også nøjes med at forklare i ord hvad der sker med de enkelte kanter, efterhånden som algoritmen betragter dem. Du skal naturligvis angive det endelige træ.
- (ii) Illustrer Prim's algoritme på grafen i Figur 1. **Du skal starte dit træ i knuden a.** Husk at forklare, hvordan du finder den næste kant at tilføje.
- (iii) Antag nu, at $G = (V, E)$ er en kantvægtet graf, hvor alle vægte er forskellige. Bevis, at G har præcist et minimum udspændende træ.

Opgave 2

Jørgen har lige fået arbejde (på prøve) ved et online datingbureau. Han er blevet ansat, fordi han har sagt, at han er god til kombinatorik og at dette ville kunne hjælpe bureauet til at få flere tilfredse kunder. Hans første opgave bliver, at lave en dating plan til den kommende fredag for 5 kvinder Nina, Ida, Emma, Anne og Bea og 5 mænd Jan, Bo, Per, Ib og Jon, ud fra følgende info givet af de 5 kvindelige deltagere (mændene blev ikke spurgt i denne omgang). Reglen er, at ingen kvinde må date mere end 1 mand ad gangen og omvendt.

- Nina har angivet at hun gerne vil date en af Bo, Per, Ib og Jan
- Ida har angivet at hun gerne vil date en af Jan og Bo

- Anne har angivet at hun gerne vil date en af Ib, Jon og Per
- Bea har angivet at hun gerne vil date en af Jan og Bo
- Emma har angivet at hun gerne vil date en af Bo og Jan

Jørgen har overvurderet sine evner og kæmper med at få lavet en plan, men det lykkes aldrig, så han stiller opgaven til sine MM541 elever og du skal derfor hjælpe ham med følgende spørgsmål. Du skal gøre dette ved at formulere problemet som et pardannelsesproblem for en 2-delt graf.

- Tegn den 2-delte graf som modellerer Jørgens problem.
- Giv en let forklarlig grund til at Jørgen ikke fandt en dating plan, dvs noget som viser, at der slet ikke findes en sådan ud fra de opgivne data.
- Hvad er det størst mulige antal par der kan laves?
- Du skal også forklare hvordan man, for alle tilsvarende dating problemer (hvor der kan være mange flere mænd og kvinder), enten kan finde en god plan hvor alle kan date, eller en delmængde af personerne som viser, at der ikke kan findes en sådan plan. Specielt skal du kort forklare, hvordan man finder en sådan delmængde, når der ikke findes en perfekt parring.

Jørgen vender tilbage til sin chef med din løsning og bliver straks lovet fastansættelse, fordi chefen kan se et potentiale i din algoritme (som Jørgen kom til at kalde sin egen). Men inden dette kan ske, skal Jørgen finde en ny plan for de 5 kvinder ovenfor som tager færrest mulige dage og hvor alle de 13 dates kan afholdes, når kravet er, at ingen kvinde/mand må have mere end en date den samme dag. Kan du også hjælpe ham med dette? Forklar gerne din svar med en kort beskrivelse af en algoritme, som altid producerer en plan med færrest mulige dating dage. Hint: benyt resultatet fra Opgave 2.5 i Tofts noter.

Opgave 3

Find, ved at bruge jobtilordningsalgoritmen fra Tofts noter afsnit II.3, en optimal pardannelse af størrelse 5 i den 2-delte graf komplette graf med punkter $\{A_1, \dots, A_5, B_1, \dots, B_5\}$ og kantvægte som angivet i tabellen nedenfor.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	13	10	11	7	10
A_2	7	8	8	5	10
A_3	13	10	10	12	10
A_4	6	1	4	3	5
A_5	11	8	10	9	11

Figure 2: Værdien på plads (A_i, B_j) angiver vægten c_{ij} af kanten mellem A_i og B_j .

Du skal anvende følgende strategi for at finde de initielle α, β værdier:

- For $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sættes α_i lig med mindste værdi af c_{ij} i rækken for A_i .
- For $j = 1, 2, 3, 4, 5$ sættes β_j lig med mindste værdi af $c_{ij} - \alpha_i$ i søjlen for B_j .

Herefter markerer du alle de celler hvor $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ og markerer en størst mulig pardannelse, som du kan finde blandt de markerede celler (der er en af størrelse 4).

Nu skal du vise, hvordan algoritmen udføres herfra. Dette inkluderer at vise hvordan du finder værdien af δ i algoritmen og opdaterer i hvert af de skridt algoritmen tager, når den startes som ovenfor.

Når algoritmen slutter (med en pardannelse af størrelse 5) skal du angive denne, samt argumentere for at den er optimal (dvs har mindst mulig omkostning).

Opgave 4

Betragt følgende lineære programmeringsproblem kaldet P nedenfor.

$$\begin{array}{llll} \text{minimer} & 5y_1 + 4y_2 + 10y_3 & & \\ \text{ufa} & 2y_1 + y_2 & \geq & 4 \\ & y_2 + 2y_3 & \geq & 2 \\ & -y_1 + y_3 & \geq & -1 \\ & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Opskriv det duale problem D til P , hvor du bruger tre duale variable x_1, x_2, x_3 , svarende til hver af de tre uligheder i P taget oppefra. Du skal forklare, hvordan du konstruerer D
- Gør rede for, at $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$ er en optimal løsning til det primale problem. Hint: brug sætningen om komplementære rester til at finde en løsning til D med samme værdi.

Opgave 5

Denne opgave omhandler rekursionsligninger (eng. recurrence relations).

- Løs rekursionsligningen $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ med startbetingelserne $a_0 = 2$ og $a_1 = 4$. Forklar hvordan du kommer frem til din løsning.
- Løs rekursionsligningen $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 4n$ med startbetingelserne $a_0 = 2$ og $a_1 = 8$.