Funktioner af flere variable

En funktion f af n variable, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, opfattes som en forskrift der til ethvert n-tuppel $(x_1, x_2, \dots x_n) \in D(f)$ knytter et entydigt tal $f(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}$.

Funktioner af flere variable

En funktion f af n variable, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, opfattes som en forskrift der til ethvert n-tuppel $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in D(f)$ knytter et entydigt tal $f(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{R}$.

$D(f)$ benævnes *definitionsmængden* for f

Mængden af værdier $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ for alle $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in D(f)$ betegnes *værdimængden* for f.

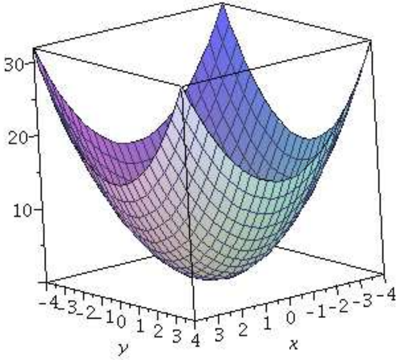
Grafer

For funktioner af to variable kan vi tegne grafen for funktionen. Det giver en flade i $\mathbb{R}^3$.

Disse er ikke altid lette at tegne i hånden!!

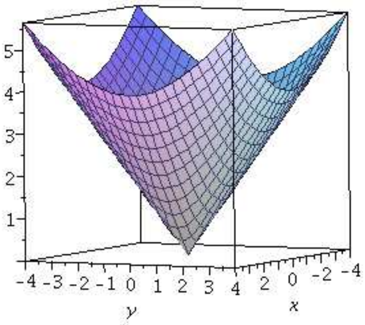
I det følgende vises nogle eksempler tegnet i Maple.

Parabel

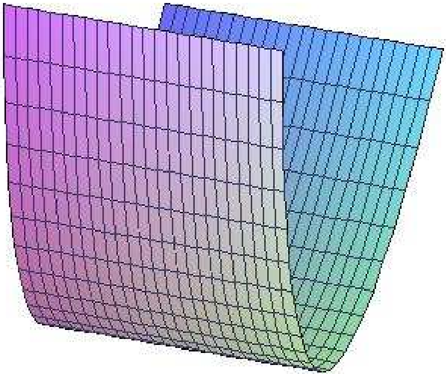


$$e(x)=x^2+y^2$$

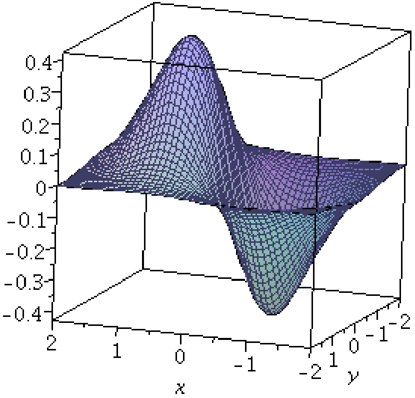
Kegle



$$h(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

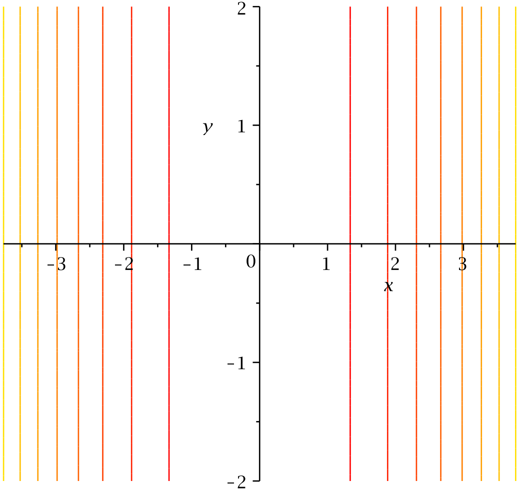


$g(x)=x^2$



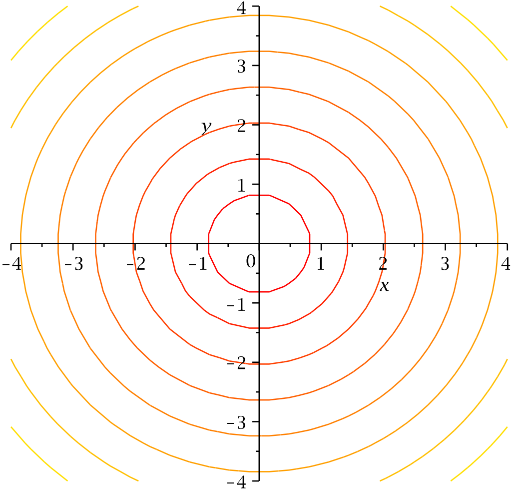
$$x^*e^{-x^2-y^2}$$

Niveau-kurver



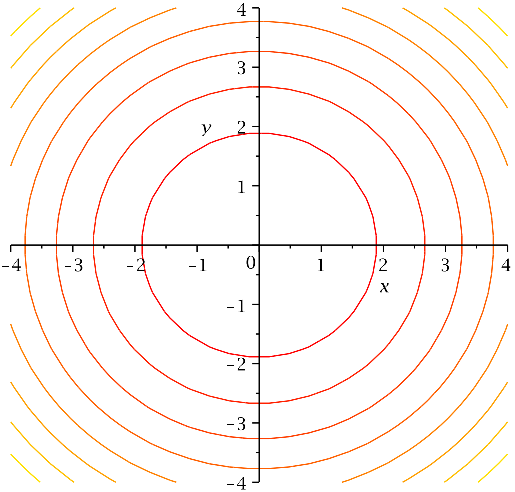
Niveau-kurver for g(x)

Niveau-kurver



Niveau–kurver, kegle

Niveau-kurver



Niveau-kurver parabel

Definition—partielle afledede:

De (første) partielle afledede af en funktion $f(x, y)$ af to variable er

$$f_1(x, y) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$
$$f_2(x, y) := \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

$f_1(x, y)$ hedder den *partielle afledede af* $f(x, y)$ *i* x*-retningen,*

$f_2(x, y)$ hedder den *partielle afledede af* $f(x, y)$ *i* y*-retningen.*

Man bestemmer $f_1(x,y)$ ved at opfatte y-variablen i $f(x,y)$ som en konstant, hvorved $f(x,y)$ bliver en funktion i een variabel x, som nu differentieres på sædvanlig vis.

På tilsvarende måde bestemmes $f_2(x,y)$.

Notationer:

For en funktion $z = f(x,y)$ i 2 variable benyttes notationerne:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y) = D_1 f(x,y) \\
f_2(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y) = D_2 f(x,y)
\end{aligned}
$$

Notationer:

Evaluering af partielle afledede i et punkt (a, b):

$$
\begin{aligned}
f_1(a,b) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right)\Big|_{(a,b)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(a,b)} = f_x(a,b) = D_1 f(a,b) \\
f_2(a,b) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right)\Big|_{(a,b)} = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(a,b)} = f_y(a,b) = D_2 f(a,b)
\end{aligned}
$$

Definition—partielle afledede:

For en funktion i flere end to variable, fx. $f(x, y, z)$ eller $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, defineres de partielle afledede

$$f_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z), \quad \ldots, \quad f_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$$

hhv.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

helt analogt!

Tangentplan og normallinie til grafen for $f(x, y)$:

Tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ i punktet (a, b) er udspændt af de to retningsvektorer

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{i} + f_1(a, b)\mathbf{k}, \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{j} + f_2(a, b)\mathbf{k}.$$

Normalvektoren $\mathbf{n}$ til tangentplanen er vinkelret på $\mathbf{T}_1$ og $\mathbf{T}_2$, og kan således bestemmes til at være

$$\mathbf{n} = f_1(a, b)\mathbf{i} + f_2(a, b)\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Tangentplanen til grafen for $f(x, y)$ *i punktet* (a, b) går igennem punktet $(a, b, f(a, b))$ og har normalvektor $\mathbf{n}$, og *har* derfor *ligningen* (s. 586):

$$f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b) + (-1)(z - f(a, b)) = 0,$$

som kønnere kan skrives på formen:

$$\boxed{z = f(a, b) + f_1(a, b)(x - a) + f_2(a, b)(y - b).}$$

Normallinien til grafen for $f(x,y)$ i punktet (a,b) går gennem punktet $(a,b,f(a,b))$ og har retningsvektor $\mathbf{n}$, og *har* derfor *parameterfremstillingen* (s. 588):

$$(a,b,f(a,b)) + t\,\mathbf{n},$$

eller

$$\boxed{(a+tf_1(a,b))\mathbf{i} + (b+tf_2(a,b))\mathbf{j} + (f(a,b)-t)\mathbf{k}, \qquad t\in\mathbb{R},}$$

og *ligningerne*

$$\boxed{\frac{x-a}{f_1(a,b)} = \frac{y-b}{f_2(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1},}$$

(sidstnævnte forudsætter, at $f_1(a,b)\neq 0$ og $f_2(a,b)\neq 0$).