

DM549

Spørgsmål 1 (8%)

Hvilke udsagn er sande?

Which propositions are true?

Svar 1.a: $\forall x \in \mathbb{Z}: x > x - 1$

Svar 1.b: $\forall x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x + y = 5$

Svar 1.c: $\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x + y = 5$

Svar 1.d: $\exists x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x^2 + 2y = 0$

Svar 1.e: $\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: y^2 \geq x$

Svar 1.f: $\forall x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x + y < x \cdot y$

Spørgsmål 2 (2%)

Hvilket udsagn er ækvivalent med $\neg(\forall x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x + y = 5)$?

Which proposition is equivalent to $\neg(\forall x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x + y = 5)$?

Svar 2.a: $\exists x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x + y \neq 5$

Svar 2.b: $\exists x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x + y = 5$

Svar 2.c: $\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x + y \neq 5$

Svar 2.d: $\exists x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x + y = 5$

Svar 2.e: $\forall x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x + y \neq 5$

Svar 2.f: $\forall x \in \mathbb{Z}: \exists y \in \mathbb{Z}: x + y = 5$

Svar 2.g: $\forall x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x + y \neq 5$

Svar 2.h: $\forall x \in \mathbb{Z}: \forall y \in \mathbb{Z}: x + y = 5$

Spørgsmål 3 (10%)

Hvilke udsagn er ækvivalente med $p \Rightarrow q$?

Which propositions are equivalent to $p \Rightarrow q$?

Svar 3.a: $\neg q \Rightarrow \neg p$

Svar 3.b: $\neg p \Rightarrow \neg q$

Svar 3.c: $\neg p \Rightarrow q$

Svar 3.d: $q \Rightarrow p$

Svar 3.e: $\neg p \vee q$

Svar 3.f: $\neg(p \wedge \neg q)$

Svar 3.g: $\neg p \vee (p \wedge q)$

Svar 3.h: $p \vee \neg q$

Svar 3.i: $p \vee q$

Svar 3.j: $p \wedge \neg q$

Spørgsmål 4 (8%)

Lad A , B og C være mængder. Hvilke udsagn er sande?

Let A , B , and C be sets. Which propositions are true

Svar 4.a: $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Svar 4.b: $(A \cap B) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$

Svar 4.c: $\overline{A \cup B} = A - B$

Svar 4.d: $A - (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C})$

Svar 4.e: $\overline{A} \cup B = A \cap \overline{B}$

Spørgsmål 5 (4%)

Betragt funktionen $f: [0, \infty) \rightarrow [-2, \infty)$ defineret ved $f(x) = x^2 - 2$.

Vælg den korrekte forskrift for den sammensatte funktion $f \circ f$.

(Husk, at $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.)

Consider the function $f: [0, \infty) \rightarrow [-2, \infty)$ defined by $f(x) = x^2 - 2$.

Choose the correct composite function $f \circ f$.

(Recall that $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.)

Svar 5.a: $(f \circ f)(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

Svar 5.b: $(f \circ f)(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

Svar 5.c: $(f \circ f)(x) = x^4 + 4$

Svar 5.d: $(f \circ f)(x) = x^4 + 2$

Svar 5.e: $(f \circ f)(x) = x^4 - 4$

Svar 5.f: $(f \circ f)(x) = x^4 - 6$

Svar 5.g: $(f \circ f)(x) = x^2 - 4$

Svar 5.h: $(f \circ f)(x) = x^2 - 2$

Svar 5.i: $(f \circ f)(x) = 2x^2 - 4$

Spørgsmål 6 (4%)

Betragt igen funktionen $f: [0, \infty) \rightarrow [-2, \infty)$ defineret ved $f(x) = x^2 - 2$.
Hvilket udsagn om den inverse funktion f^{-1} er sandt?

*Consider again the function $f: [0, \infty) \rightarrow [-2, \infty)$ defined by $f(x) = x^2 - 2$.
Which statement about the inverse function f^{-1} is true?*

Svar 6.a: $f^{-1}(x) = x^2 - 2$

Svar 6.b: $f^{-1}(x) = x^2 + 2$

Svar 6.c: $f^{-1}(x) = 2 - x^2$

Svar 6.d: $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$

Svar 6.e: $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$

Svar 6.f: $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$

Svar 6.g: $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 2}$

Svar 6.h: $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}$

Svar 6.i: f har ikke en invers funktion.
The inverse function of f does not exist.

Spørgsmål 7 (10%)

Denne opgave går ud på at bevise, at $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$, for $n \geq 1$.

Hvilke af nedenstående muligheder udgør korrekte induktionsbeviser, inkl. korrekte begrundelser?

This question is about proving that $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$, for $n \geq 1$.

Choose the options that constitute a correct proof by induction, incl. correct arguments.

Svar 7.a: **Basis:** $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ og $\sum_{i=1}^2 (2i - 1) = 1 + 3 = 4 = 2^2$.

Induktionsskridt: For $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) &= \sum_{i=1}^n (2i - 1) + 2(n + 1) - 1 \\ &= n^2 + 2(n + 1) - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Svar 7.b: **Basis:** $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$ og $\sum_{i=1}^2 (2i - 1) = 1 + 3 = 4 = 2^2$.

Induktionsskridt: For $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) + 2n - 1 + 2(n + 1) - 1 \\ &= (n - 1)^2 + 2n - 1 + 2(n + 1) - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Svar 7.c: **Basis:** $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (2i - 1) &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n - 1)^2 + 2n - 1 \\ &= n^2\end{aligned}$$

Svar 7.d: **Basis:** $\sum_{i=1}^2 (2i - 1) = 1 + 3 = 4 = 2^2$.

Induktionsskridt: For $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (2i - 1) &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) + 2n - 1 \\ &= (n - 1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2\end{aligned}$$

Svar 7.e: **Basis:** $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (2i - 1) &= \sum_{i=1}^n (2i - 1) + 2n - 1 \\ &= n^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n + 1)^2\end{aligned}$$

Svar 7.f: **Basis:** $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) + 2n - 1 \\ &= (n - 1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2\end{aligned}$$

Svar 7.g: **Basis:** $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (2i - 1) &= \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 1) + 2n - 1 \\ &= (n - 1)^2 + 2n - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= n^2\end{aligned}$$

Svar 7.h: **Basis:** $\sum_{i=1}^1 (2i - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$.

Induktionsskridt: For $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) &= \sum_{i=1}^n (2i - 1) + 2(n + 1) - 1 \\ &= n^2 + 2(n + 1) - 1, \text{ ifølge induktionsantagelsen} \\ &= (n + 1)^2\end{aligned}$$

Spørgsmål 8 (10%)

Lad $a, b \in \mathbb{Z}$. Hvilke udsagn er sande?

Let $a, b \in \mathbb{Z}$. Which propositions are true?

Svar 8.a: $-2 \equiv 3 \pmod{5}$

Svar 8.b: $10 \equiv 70 \pmod{10}$

Svar 8.c: $-2 \equiv 2 \pmod{5}$

Svar 8.d: $2 \equiv 10 \pmod{5}$

Svar 8.e: $a \equiv b \pmod{5} \Rightarrow 2a \equiv 7b \pmod{5}$

Svar 8.f: $a \equiv b \pmod{6} \Rightarrow 3a \equiv 3b \pmod{6}$

Svar 8.g: $5a \equiv 5b \pmod{10} \Rightarrow a \equiv b \pmod{10}$

Spørgsmål 9 (10%)

Lad $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Husk, at gcd betyder “største fælles divisor”, lcm betyder “mindste fælles multiplum”, og $\nmid$ betyder “går ikke op i”.

Hvilke udsagn er sande?

Let $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Recall that gcd means “greatest common divisor”, lcm means “least common multiple”, and $\nmid$ means “does not divide”.

Which propositions are true?

Svar 9.a: $a \nmid bc \Rightarrow a \nmid b \wedge a \nmid c$

Svar 9.b: $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid (b + 2c)$

Svar 9.c: $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$

Svar 9.d: $\gcd(a, b) < a \Rightarrow \text{lcm}(a, b) < a$

Svar 9.e: 6 og 25 er indbyrdes primiske.
6 and 25 are relatively prime.

Svar 9.f: 7 og 28 er indbyrdes primiske.
7 and 28 are relatively prime.

Spørgsmål 10 (10%)

Hvilke kongruens-systemer har (mindst) en løsning mellem 0 og 100?

Which systems of congruences have at least one solution between 0 and 100?

Svar 10.a:

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

Svar 10.b:

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$x \equiv 5 \pmod{6}$$

Svar 10.c:

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

Svar 10.d:

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 2 \pmod{4}$$

$$x \equiv 1 \pmod{11}$$

Svar 10.e:

$$x \equiv 1 \pmod{2}$$

$$x \equiv 2 \pmod{4}$$

$$x \equiv 1 \pmod{6}$$

Spørgsmål 11 (4%)

Betragt relationen $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = 2a + 1\}$.
Hvilke par tilhører R ?

*Consider the relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = 2a + 1\}$.
Which pairs belong to R ?*

Svar 11.a: $(3, 1)$

Svar 11.b: $(1, 3)$

Svar 11.c: $(2, 5)$

Svar 11.d: $(3, 7)$

Svar 11.e: $(10, 21)$

Svar 11.f: $(1, 5)$

Svar 11.g: $(1, 7)$

Svar 11.h: $(10, 11)$

Svar 11.i: $(3, 8)$

Svar 11.j: $(2, 8)$

Spørgsmål 12 (10%)

Betragt igen relationen $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = 2a + 1\}$.
Hvilke udsagn er sande?

Consider again the relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid b = 2a + 1\}$.
Which statements are true?

Svar 12.a: R er refleksiv

R is reflexive

Svar 12.b: R er **ikke** refleksiv

R is **not** reflexive

Svar 12.c: R er symmetrisk

R is symmetric

Svar 12.d: R er **ikke** symmetrisk

R is **not** symmetric

Svar 12.e: R er anti-symmetrisk

R is anti-symmetric

Svar 12.f: R er **ikke** anti-symmetrisk

R is **not** anti-symmetric

Svar 12.g: R er transitiv

R is transitive

Svar 12.h: R er **ikke** transitiv

R is **not** transitive

Svar 12.i: R er en ækvivalens-relation

R is an equivalence relation

Svar 12.j: R er **ikke** en ækvivalensrelation

R is **not** an equivalence relation

Svar 12.k: R er en partiel ordning

R is a partial ordering

Svar 12.l: R er **ikke** en partiel ordning

R is **not** a partial ordering

Spørgsmål 13 (10%)

Hvilke udsagn er sande?

Which statements are true?

Svar 13.a: Følgen $\left\{ \frac{5n^2 + n + 1}{2n^2 - 1} \right\}$ konvergerer.

The sequence $\left\{ \frac{5n^2 + n + 1}{2n^2 - 1} \right\}$ is convergent.

Svar 13.b: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!} = 0$

Svar 13.c: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n^2} = 2$

Svar 13.d: Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ konvergerer.

The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ is convergent.

Svar 13.e: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{4}{3}$