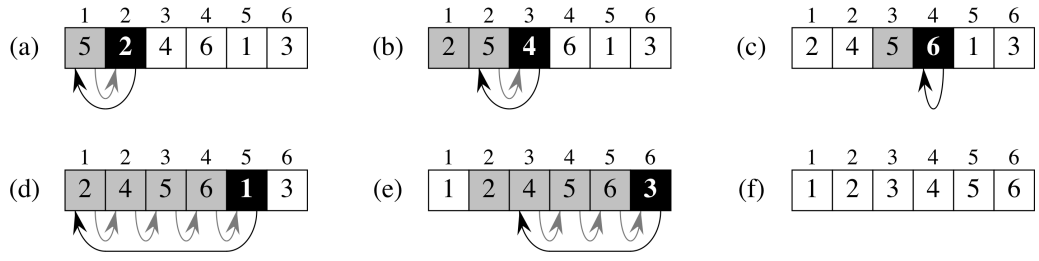
Invarianter

Invarianter

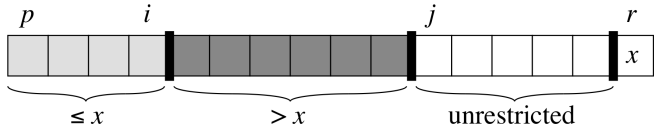
Invariant: Et forhold, som vedligeholdes af algoritmen gennem (dele af) dens udførelse. Udgør ofte kernen af ideen bag algoritmen.

Eksempel: Insertionsort:



Invariant: Alt til venstre for det sorte felt er sorteret.

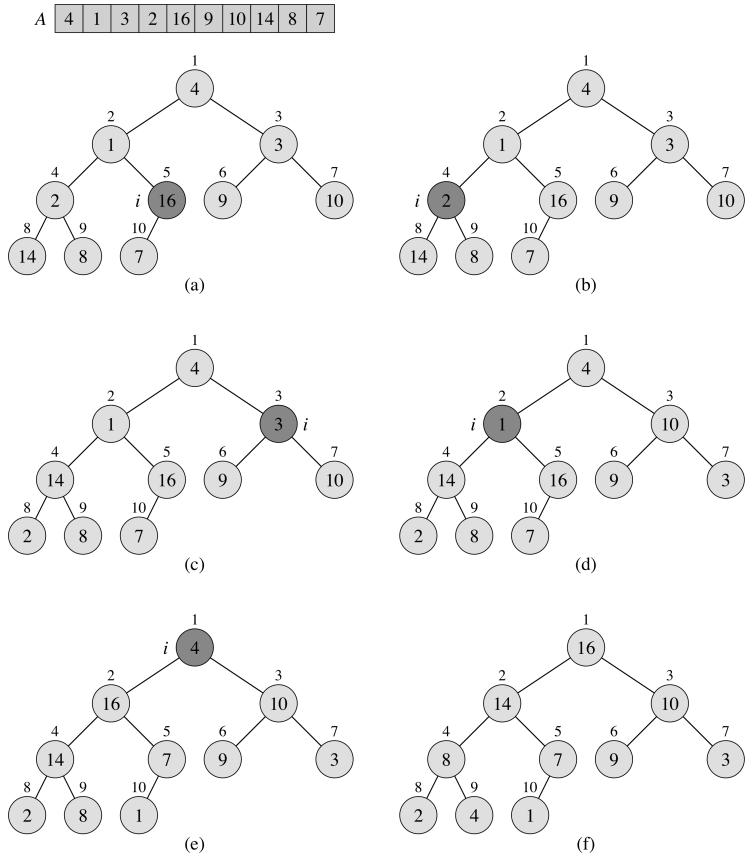
Eksempel: Partition fra Quicksort:



Invariant: Lysegrå del $\leq x <$ mørkegrå del.

Invarianter

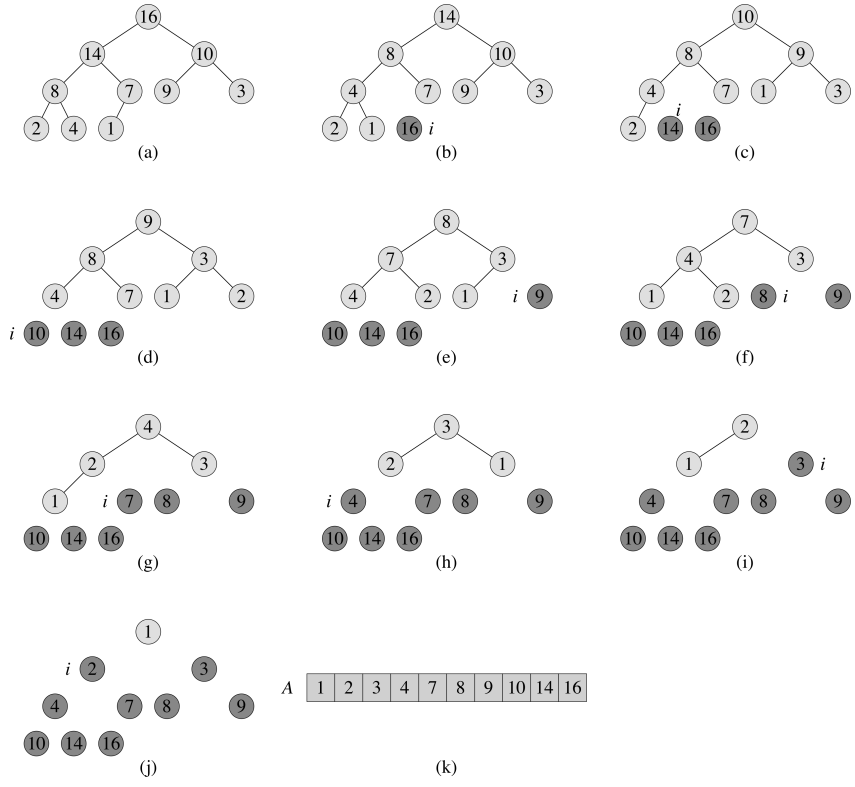
Eksempel: Build-Heap:



Invariant: Undertræer, hvis rod har array-indeks større end den mørke knude, overholder heaporder.

Invarianter

Eksempel: Heapsort (og enhver Selektionsort-baseret sortering):



Invariant: Det mørke er sorteret, og alt i det lyse er $\leq$ det mørke.

Invarianter, mere formelt

Invariant for algoritme: et udsagn om indholdet af hukommelsen (variable, arrays,. . .) som:

- Er sandt efter alle skridt.
- Ved algoritmens afslutning kan korrekthed af output udledes af udsagnet $S(k)$ samt de omstændigheder som fik algoritmen til at stoppe.

I praksis ofte een invariant for een samling skridt (f.eks. 0 eller flere gennemløb af en `while` eller `for` løkke). En anden invariant kan så om nødvendigt bruges for næste samling skridt af algoritmen.

Induktion

Invarianter vises at holde ved hjælp af induktion:

1) Invariant overholdt i starten 2) Invariant overholdt før et skridt $\Rightarrow$ overholdt efter	$\Rightarrow$	Invariant altid overholdt

(hvor "skridt" ofte er en iteration af en løkke). Dvs: Vis 1) og 2).

Induktion $\sim$ "Dominoprincippet":

1) Brik 1 falder 2) Brik k falder $\Rightarrow$ brik $k+1$ falder	$\Rightarrow$	Alle brikker falder

Brug af invarianter

Invarianter kan bruges på to forskellige detalje-niveauer (med en glidende overgang imellem dem):

1. Som værktøj til at udvikle algoritme-ideer: Med den rette invariant fanges essensen af metoden, og algoritmen skal "blot" skrives ud fra at denne invariant skal vedligeholdes.
2. Som værktøj til at nedskrive kode (eller detaljeret pseudo-kode) og vise den konkrete kode korrekt.

I første anvendelse er blødere beskrivelser (tekst, figur) passende, jvf. eksempler ovenfor. I anden anvendelse må man nedskrive invarianten præcist i termer af konkrete variable fra koden, samt argumentere via den konkrete kodes ændringer af disse.

Eksemplet nedenfor med af finde største element i et array illustrerer dette.

Korrekthed af algoritmer

Recall: en algoritme er korrekt hvis den for alle input:

1. Stopper.
2. Når den stopper, svarer med det ønskede.

Invarianter er en metode til at vise 2). At vise 1) vises som regel ved termineringsfunktioner (disse er ofte så simple at man ikke direkte snakker om terminering).

Termineringsfunktion

En funktion som

- Altid er ≥ 0.
- Falder med mindst 1 for hvert skridt.

Hvis en funktion med ovenstående egenskaber kan defineres, er terminering klar: der kan kun foretages et antal skridt svarende til funktionens værdi ved start af algoritmen (dvs. dens værdi for state til tiden nul).

Eksempel

Find største element i array:

```
max = A[0]
i = 1
while i < A.length
  if A[i] > max
    max = A[i]
  i++
```

Invariant $S(k)$: "Efter den k'te iteration af while-løkke indeholder `max` den største værdi af $A[0..(i-1)]$".

Termineringsfunktion: $A.\text{length} - i$.